

ESTIMACIÓN DE LA PRIMA POR VENCIMIENTO DE LOS TES EN PESOS DEL GOBIERNO COLOMBIANO*

JUAN ANDRÉS ESPINOSA TORRES
(jespinto@banrep.gov.co)

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA
(lmelovel@banrep.gov.co)

JOSÉ FERNANDO MORENO GUTIÉRREZ
(jmorengu@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

RESUMEN. Se estima la prima por vencimiento a partir de un modelo afín de 4 componentes principales de la estructura a términos de las tasas de interés de los bonos soberanos de Colombia en pesos. Se sigue la metodología propuesta por Adrian et al. (2013) para el periodo comprendido entre enero de 2003 y octubre de 2014. Los resultados obtenidos indican que la prima por término es mayor y más volátil a medida que aumenta el vencimiento. También se observa que esta prima es decreciente en el tiempo, lo cual se puede asociar a las mejores condiciones del mercado de estos títulos, la mayor estabilidad macroeconómica y las mayores condiciones de liquidez a nivel internacional. Adicionalmente, el modelo estimado captura eventos de estrés observados en el mercado.

Palabras Claves. Prima por vencimiento, estructura a términos de las tasas de interés, modelo afín.

JEL Classification. G12, C51, C30

1. INTRODUCCIÓN.

En términos generales, la literatura plantea que las tasas de los bonos emitidos por los gobiernos pueden desagregarse en dos componentes: expectativas sobre la tasa nominal de corto plazo y una prima por vencimiento. Por lo tanto, los cambios en los rendimientos de los títulos están principalmente dados por estos elementos y los factores que los afectan. Por ejemplo, los movimientos en las tasas de interés efectuados por los bancos centrales pueden generar cambios en los rendimientos, ya que se afectan las expectativas de las tasas de interés de corto plazo. De la misma manera, variables que incrementen la percepción de riesgo país pueden generar movimientos en las tasas, en la medida en que mantener el título puede representar pérdidas ante una mayor incertidumbre, lo cual incrementa la prima por vencimiento y por consiguiente las tasas de los títulos.

Fecha: Noviembre 2014.

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Los autores agradecen a Emanuel Moench por compartir parte del código elaborado en Matlab[®], el cual fue complementado y modificado en R.

Dada la información que contienen los bonos y el efecto de las acciones de política económica sobre los mismos, la descomposición de la curva de rendimientos de los títulos de los gobiernos ha llamado la atención de los *policymakers* durante la última década.

Por ejemplo, posterior al incremento de las tasas de política monetaria por parte de la Reserva Federal (*Fed*) en junio de 2004, se observó un comportamiento no esperado en las tasas de largo plazo de los bonos del Tesoro Americano, dado que a pesar de dicho incremento éstas cayeron. Este tipo de dinámica no se había observado en ciclos anteriores de contracción (1994 y 1999). En febrero de 2005, Alan Greenspan, en ese momento presidente de la *Fed*, se refirió a este fenómeno como un “acertijo” sin precedentes recientes (Greenspan, 2005). De la misma manera, en julio de 2005 Donald Kohn (Gobernador de la *Fed*) planteó que nada ilustraba mejor la necesidad de medir correctamente las primas de riesgo de las tasas de largo plazo, que el contexto de tasas de interés que se vivía en dicho momento (Kohn, 2005).

Manteniendo esta inquietud y ampliando el debate, Bernanke (2006) planteó una serie de interrogantes respecto a las posibles implicaciones sobre el manejo de la política monetaria, dado el comportamiento inusual que habían presentado las tasas de largo plazo. Además, citó por primera vez en un discurso público un trabajo relacionado con la estimación de la descomposición de las tasas de los bonos¹. La conclusión del discurso fue que dependiendo del componente que afecte el comportamiento de las tasas de largo plazo (expectativas de tasas o prima por vencimiento) se debería adoptar una medida de política diferente.²

En dicho discurso Bernanke planteó que si el componente de expectativas de tasas de interés de corto plazo caía mientras la tasa de política monetaria aumentaba, lo cual entre otras cosas implica menor crecimiento económico esperado, la *Fed* debería mantener o reducir su tasa. Si por el contrario, era la prima por vencimiento la que caía, la *Fed* debería incrementar aún más y de forma más acelerada la tasa, dado que la reducción en la prima puede estimular la demanda en lugar de contraerla tal y como la *Fed* pretendía incrementando su tasa de política. Finalmente, resaltó la importancia del seguimiento de las tasas de los bonos del Gobierno y su descomposición para la política monetaria.

Posteriormente, esta relevancia aumentó considerablemente en países desarrollados luego que, con el fin de impulsar el crecimiento económico ante la crisis financiera internacional de 2008, los bancos centrales de estos países redujeran sus tasas de interés de política hasta alcanzar el límite inferior de cero. A pesar de lo anterior, los resultados no fueron los esperados y las autoridades tuvieron que responder con medidas de política no tradicionales para reducir la prima por vencimiento, y así las tasas de interés de largo plazo con el fin de darle un mayor impulso a la economía.

En línea con lo anterior, Bernanke (2013) resumió su hipótesis respecto a las razones por las cuales las tasas de largo plazo de los países desarrollados se encontraban en niveles tan bajos. Dentro de sus planteamientos resaltó la estabilidad de la tasa de corto plazo, la estabilidad de las expectativas de inflación, y principalmente la reducción de la prima por vencimiento. Además, agregó un nuevo elemento en el debate de política monetaria referente a la estabilidad financiera y las implicaciones que podría tener la finalización de los programas de compra de activos por los bancos centrales. Según él, se presentaba una disyuntiva entre el efecto negativo del incremento de la prima por término en las condiciones de liquidez y solvencia de los agentes, y los posibles efectos sobre la economía por mantener las tasas en niveles tan bajos.

¹En este discurso se citó el trabajo de Kim y Wright (2005).

²Es de recordar que la prima por vencimiento se define como la compensación que recibe un inversionista por mantener en su portafolio un título de larga duración, en lugar de renovar la compra de un título de corto plazo durante el periodo de madurez del primero. Es decir, esta prima corresponde a la compensación recibida por asumir un riesgo de tasa de interés.

Posteriormente, los países emergentes se sumaron al debate una vez la *Fed* anunció en mayo de 2013 el desmonte de su programa de compras de activos, lo cual desvalorizó sus monedas y bonos de deuda pública. Adicionalmente, Bernanke (2013) resaltó los efectos sobre la estabilidad financiera generados por incrementos importantes en las tasas de largo plazo a nivel global, los cuales a su vez pueden ser causados por incrementos en las primas por vencimiento. Por tal motivo, además de los anteriormente señalados, recientemente ha tomado relevancia la descomposición de las tasas de largo plazo y su análisis para los bancos centrales de los países emergentes.

Para el caso colombiano, se han producido recientemente varios documentos que resaltan la importancia del comportamiento de las tasas de largo plazo de los bonos del Gobierno. Algunos documentos como los del Banco de la República (2013) y Toro (2014) describen los efectos sobre las tasas de largo plazo que se presentaron luego del anuncio del "*Tapering*" por parte de la Fed y describen las posibles implicaciones de la normalización de la política monetaria de Estados Unidos. Por su parte, Guarín et al. (2014) realizan un análisis empírico de la relación entre las tasas de largo plazo de los bonos del Gobierno colombiano y de Estados Unidos. Adicionalmente, trabajos como el de Melo y Castro (2010) analizan la relación de la curva de rendimientos con variables macroeconómicas.

Dado lo anterior, para los bancos centrales es relevante entender el comportamiento de los títulos de largo plazo y así, implementar modelos que estimen la descomposición de los mismos.

Respecto a lo anterior, dentro de la literatura referente a la descomposición de las tasas de interés se destacan los modelos afines³. Algunos trabajos importantes en esta área son los de Kim y Wright (2005), Cochrane y Piazzesi (2005), Kim y Orphanides (2007), Cochrane y Piazzesi (2008), Wright (2011), Adrian et al. (2013), Abbritti et al. (2013) y Labordaa y Olmo (2014).

En términos generales, estos modelos descomponen las tasas de los bonos soberanos en dos componentes: expectativas de tasa de corto plazo y prima por vencimiento. Además, asumen que el factor de descuento estocástico es exponencialmente afín en los choques que conducen la economía, que los precios del riesgo son afines con las variables de estado, y que las innovaciones de dichas variables y los errores de los rendimientos son gaussianos. Cabe destacar que estos modelos son estimados generalmente por máxima verosimilitud, lo cual implica que deben realizarse supuestos sobre la correlación de los errores de los precios de los rendimientos. Por otro lado, estos modelos presentan un alto costo computacional.

Recientemente Adrian et al. (2013) plantearon un modelo afín para analizar la estructura a plazos de las tasas de interés y en particular, para calcular la prima por término. Este modelo es estimado a través de regresiones lineales en varias etapas. Dicha metodología deja a un lado el supuesto de no correlación sobre los errores de los precios de los rendimientos y adicionalmente, es menos costosa en términos computacionales.

Cabe resaltar que para el caso colombiano, al igual que para economías emergentes, la literatura al respecto no es muy extensa en lo respectivo a la estimación de la prima por vencimiento. Algunos trabajos como los de Arango et al. (2002), Julio et al. (2002), Melo y Castro (2010) y Broner et al. (2013) introducen el concepto de la prima y muestran el papel que esta juega en la estructura a plazos. Sin embargo, solo el último presenta las descomposiciones de la curva cero cupón con el fin de determinar dicho componente en el caso de algunos países emergentes como Argentina, Colombia, Brasil, entre otros.

³También existen otros tipos de modelos para calcular esta descomposición, como los basados en pronósticos de las tasas de interés o modelos basados en encuestas respecto a las tasas de corto plazo a futuro.

Por tal motivo, el presente documento estima la prima por vencimiento de las tasas de interés de los bonos del Gobierno colombiano denominados en pesos, a partir de la metodología de Adrian et al. (2013).

El documento se divide en cuatro secciones, siendo esta introducción la primera; la sección dos describe la metodología empleada para la estimación de la prima por vencimiento, y en la sección tres se presentan los resultados. Por último, en la cuarta sección se realizan comentarios finales.

2. METODOLOGÍA

En esta sección se presenta el modelo econométrico utilizado, el método de estimación y la construcción de la estructura a términos siguiendo la metodología de Adrian et al. (2013), de ahora en adelante denominada *ACM*.

2.1. Modelo Econométrico. Siguiendo a *ACM*, el vector de variables de estado X_t de dimensión $K \times 1$, las cuales en la práctica corresponden a los primeros K componentes principales extraídos de la curva de los bonos cero cupón, puede ser modelado por el siguiente proceso VAR(1):

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + v_{t+1} \quad (1)$$

Donde las innovaciones $v_{t+1} | X_t$ siguen una distribución normal, $N(0, \Sigma)$. Si se define a $P_t^{(n)}$ como el precio de un bono cero cupón con vencimiento n en el período t , y dado que se cumple la condición de no arbitraje, entonces existe un kernel de valoración M_t tal que $P_t^{(n)} = E_t\{M_{t+1}P_{t+1}^{(n-1)}\}$; se asume que M_t es exponencialmente afín con la siguiente ecuación:

$$M_{t+1} = \exp\left(-r_t - \frac{1}{2}\lambda_t'\lambda_t - \lambda_t'\Sigma^{-1/2}v_{t+1}\right) \quad (2)$$

Adicionalmente, se define $r_t = \ln P_t^{(1)}$ como la tasa libre de riesgo continuamente compuesta; además, se asume que los precios de riesgo del mercado siguen la forma:

$$\lambda_t = \Sigma^{-1/2}(\lambda_0 + \lambda_1 X_t) \quad (3)$$

El término λ_t es de gran importancia estadística y económica, ya que caracteriza el riesgo para cada componente principal. Este se puede desagregar en una constante (λ_0), relacionada con el nivel de estos precios, y en un vector (λ_1) asociado a la relación entre el precio y estos componentes.

Por último, se denota el exceso de retorno (en logaritmos) para un bono con n períodos de vencimiento como $rx_{t+1}^{(n-1)}$, definido de la siguiente manera:

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = \ln P_{t+1}^{(n-1)} - \ln P_t^{(n)} - r_t \quad (4)$$

A partir de lo anterior, es posible derivar el siguiente proceso generador de datos para estos excesos de retorno:

$$\begin{aligned}
rx_{t+1}^{(n-1)} = & \underbrace{\beta^{(n-1)' (\lambda_0 + \lambda_1 X_t)}_{\text{Retorno Esperado}} - \underbrace{\frac{1}{2} (\beta^{(n-1)' \Sigma \beta^{(n-1)} + \sigma^2)}_{\text{Ajuste de Convexidad}}}_{\text{Precio de la innovación}} \\
& + \underbrace{\beta^{(n-1)' v_{t+1}}_{\text{Precio de la innovación}} + \underbrace{e_{t+1}^{(n-1)}}_{\text{Error}}}_{\text{Error}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Donde $\beta^{(n-1)' = Cov_t [rx_{t+1}^{(n-1)}, v_{t+1}'] \Sigma^{-1}$

El anterior proceso se puede representar matricialmente como:

$$rx = \beta' (\lambda_0 i_T' + \lambda_1 X_-) - \frac{1}{2} (B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 i_N) i_T' + \beta' V + E \tag{6}$$

Donde $rx = [rx_1, \dots, rx_T]$ es una matriz de excesos de retorno de dimensión $N \times T$, $\beta = [\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(N)}]$ es una matriz de $K \times N$, i_i es un vector de unos de tamaño $i \times 1$, $i = N, T$, $X_- = [X_0, \dots, X_{T-1}]$ es una matriz de orden $K \times T$ de factores rezagados, $B^* = [\text{vec}(\beta^{(1)} \beta^{(1)'})', \dots, \text{vec}(\beta^{(N)} \beta^{(N)'})']'$ es una matriz de orden $N \times K^2$, V es una matriz de innovaciones de dimensión $K \times T$ y E denota una matriz de términos de error de orden $N \times T$.

2.2. Estimación. En esta sección se muestra el procedimiento utilizado para estimar los parámetros del modelo que describe los excesos de retorno dados en la ecuación (5). Asimismo, se presenta el método utilizado para estimar la prima por vencimiento.

2.2.1. Estimación de los parámetros. La metodología utilizada para estimar los parámetros del modelo corresponde al siguiente procedimiento propuesto por ACM, el cual es desarrollado en tres etapas y es basado en mínimos cuadrados ordinarios:

0. En primer lugar, se extraen K componentes principales sobre los rendimientos de la curva cero cupón a través del método de descomposición en valores singulares.⁴ Una vez obtenidos estos factores son estandarizados (X_t).
1. Posteriormente, se estima la regresión descrita en (1) usando Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), obteniendo de esta forma los residuales, \hat{v}_{t+1} , y su matriz de Varianza-Covarianza, definida como $\hat{\Sigma} = \hat{V} \hat{V}' / (T - 1)$, donde \hat{V} de dimensión $K \times T$ se obtiene agrupando las innovaciones estimadas.
2. A partir del cálculo de los excesos de retorno presentados en (4), las innovaciones \hat{v}_{t+1} y los factores X_t , es posible expresar el proceso generador de datos descrito en la ecuación (5) de forma compacta como:

$$rx = \mathbf{a} i_T' + \beta' \hat{V} + \mathbf{c} X_- + E \tag{7}$$

Posteriormente, se estiman los parámetros de la expresión anterior por MCO. Si los regresores de

⁴Para identificar correctamente estos parámetros, un factor se rota cuando el promedio de sus ponderaciones son negativas. Esto asegura que las medias de las ponderaciones no puedan resultar negativas.

esta ecuación son agrupados en la matriz de diseño $\tilde{Z} = [\iota_T, \widehat{V}', X_-']'$, los parámetros estimados se pueden notar como:

$$[\widehat{a}, \widehat{\beta}', \widehat{c}] = r\tilde{x}\tilde{Z}' (\tilde{Z}\tilde{Z}')^{-1} \quad (8)$$

Adicionalmente, se utiliza $\text{tr}(\widehat{E}\widehat{E}')/NT$ como estimador de σ^2 , donde \widehat{E} corresponde a la matriz de los residuos de orden $N \times T$. Finalmente, se construye \widehat{B}^* a partir de $\widehat{\beta}$.

3. Comparando la expresión (7) con el modelo propuesto en (6), se tiene:

$$\begin{cases} \mathbf{a} &= \beta' \lambda_0 - \frac{1}{2} (B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 \iota_N) \\ \mathbf{c} &= \beta' \lambda_1 \end{cases}$$

Por lo tanto, es posible estimar los parámetros $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1]$ que caracterizan el riesgo de la siguiente forma:

$$\widehat{\lambda}_0 = (\widehat{\beta}\widehat{\beta}')^{-1} \widehat{\beta} \left(\widehat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} (\widehat{B}^* \text{vec}(\widehat{\Sigma}) + \widehat{\sigma}^2 \iota_N) \right) \quad (9)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = (\widehat{\beta}\widehat{\beta}')^{-1} \widehat{\beta} \widehat{\mathbf{c}} \quad (10)$$

donde λ_0 es un vector de tamaño $K \times 1$ y λ_1 una matriz de orden $K \times K$.

ACM muestran que los errores estándar asintóticos de los estimadores de los parámetros en (5), que describen la dinámica de los retornos, se pueden obtener del siguiente resultado:

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \text{vec}(\widehat{\beta} - \beta) \\ \text{vec}(\widehat{\Lambda} - \Lambda) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\beta & C'_{\Lambda, \beta} \\ C_{\Lambda, \beta} & \nu_\Lambda \end{bmatrix} \right) \quad (11)$$

Las expresiones para $\nu_\beta, C_{\Lambda, \beta}$ y ν_Λ se presentan en el Apéndice A.

2.2.2. Estimación de la prima por vencimiento. En esta sección se expresa la curva de rendimientos cero cupón como la suma de dos componentes: rendimientos de riesgo neutro y la prima por vencimiento.

Basados en los supuestos realizados, ACM muestran que la curva cero cupón se puede expresar de la siguiente forma:

$$\ln P_t^{(n)} = A_n + B_n' X_t + u_t^{(n)} \quad (12)$$

Combinando (4) y (12) se obtiene:

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = A_{n-1} + B_{n-1}' X_{t+1} + u_{t+1}^{(n-1)} - A_n - B_n' X_t - u_t^{(n)} + A_1 + B_1' X_t + u_t^{(1)} \quad (13)$$

Reorganizando y combinando (1), (5) y (12) es posible derivar las siguientes recursiones partiendo de $A_0 = 0$ y $B_0' = 0$:⁵

⁵Adicionalmente, A_1 y B_1' corresponden a los valores iniciales de dicho proceso recurrente, en el cual δ_0 y δ_1 se obtienen de estimar una regresión de los rendimientos correspondientes al primer mes ($n = 1$) en unidades porcentuales, contra una constante y los factores obtenidos X_t , es decir: $\frac{Y_t^{(1)}}{12} = \delta_0 + \delta_1 X_t + u_t^{(1)}$. Posteriormente, dicho proceso puede calcularse para todos los vencimientos, construyendo así la estructura a términos de dicha curva de rendimiento para un bono cero cupón.

$$A_n = A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu - \lambda_0) + \frac{1}{2}(B'_{n-1}\Sigma B_{n-1} + \sigma^2) - \delta_0 \quad (14)$$

$$B'_n = B'_{n-1}(\Phi - \lambda_1) - \delta'_1 \quad (15)$$

$$\beta^{(n)} = B'_n \quad (16)$$

Adicionalmente, el error asociado a los retornos en función de los errores de valoración del rendimiento se define a partir de la siguiente ecuación:

$$e_{t+1}^{(n-1)} = u_{t+1}^{(n-1)} - u_t^{(n)} + u_t^{(1)} \quad (17)$$

El anterior resultado implica que existe correlación serial y transversal en $e_{t+1}^{(n-1)}$ aún si $u_t^{(n)}$ es i.i.d.; no obstante, otros métodos de estimación como Kim y Wright (2005), Joslin et al. (2011), y Hamilton y Wu (2012) ignoran este hecho.⁶

Por otro lado, el rendimiento se puede descomponer como la suma de dos componentes: la prima por vencimiento y el rendimiento bajo riesgo neutral. Este último se puede calcular utilizando las recursiones anteriores suponiendo que $\Lambda = 0$; en este caso, las iteraciones anteriormente descritas se denotan como A_n^{RF} y B_n^{RF} y por lo tanto, corresponden a los parámetros de la curva ajustados por riesgo, lo cual implica que el rendimiento bajo riesgo neutral, $Y_t^{(n)RF} \equiv -\frac{1}{n}(A_n^{RF} + B_n^{RF}'X_t)$, es igual al valor esperado del promedio futuro del rendimiento sobre los siguientes n periodos.

Por lo tanto, la prima por vencimiento para el período t , con madurez n meses, denotada por $\psi_t^{(n)}$ puede ser calculada como la diferencia entre el rendimiento estimado por el modelo y el rendimiento calculado bajo riesgo neutral, es decir:

$$\widehat{\psi}_t^{(n)} = \widehat{Y}_t^{(n)} - \widehat{Y}_t^{(n)RF} \quad (18)$$

Donde $\widehat{Y}_t^{(n)}$ denota rendimiento estimado por el modelo (12) para el período t y el vencimiento a n meses. Los resultados empíricos de este procedimiento se presentan en la siguiente sección.

3. RESULTADOS EMPÍRICOS.

A continuación se presentan los resultados del modelo descrito anteriormente. Esta sección se divide de la siguiente manera: tratamiento de los datos, especificación del número de factores, resultados de las estimaciones para un modelo de 4 factores, análisis de bondad de ajuste para el modelo, cálculo de la prima por término, y por último, descomposiciones de varianza para el *kernel* de valoración y de los excesos de retorno.

3.1. Tratamiento de los Datos. Los rendimientos, $Y_t^{(n)}$, asociados a la curva cero cupón son calculados a partir de los parámetros de la metodología Nelson y Siegel para los TES en pesos transados en los mercados SEN y MEC con vencimientos entre 1 y 120 meses.⁷ La muestra utilizada incluye los periodos comprendidos entre enero de 2003 y octubre de 2014.

⁶Es importante notar que para comprobar que el proceso recurrente anteriormente presentado es apropiado, se debe verificar que el supuesto mostrado en la expresión (16) se cumpla para todos los vencimientos.

⁷Es de notar que los parámetros de la metodología de Nelson y Siegel se encuentran en frecuencia diaria, como dato mensual se seleccionó el dato correspondiente al último día de cada mes.

Posteriormente, se calculan los primeros K componentes principales sobre los rendimientos con vencimientos $n = 3, 4, 5, \dots, 120$ meses. Estos corresponden al conjunto de variables estado X_t descritas en la ecuación (1). Adicionalmente, se calculan los precios asociados a estos rendimientos y los excesos de retorno, $rx_{t+1}^{(n-1)}$, a partir de la ecuación (4) para los vencimientos $n = 6, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120$ meses; por lo tanto, el número de vencimientos para realizar la estimación previamente descrita es $N = 11$. En este contexto la tasa libre de riesgo se define como la tasa con vencimiento a un mes.

3.2. Pruebas de especificación del número de factores. La literatura sugiere que, en general, 3 factores son suficientes para describir el comportamiento de la curva cero cupón (Scheinkman y Litterman (1991)). Sin embargo, algunos autores argumentan que utilizar 4 factores (Cochrane y Piazzesi (2008)) o 5 (ACM) proporciona mejoras en términos estadísticos para la estimación de un modelo de la estructura a plazos de los bonos del Gobierno de Estados Unidos.

En el caso de países emergentes, existen algunos trabajos como el de Rodrigues de Almeida (2004), el cual estima un modelo multifactor para Brasil calculando los tres factores de Scheinkman y Litterman (1991). Melo y Castro (2010) estiman la estructura a términos de las tasas de interés y calculan los 3 componentes principales anteriormente mencionados a partir de algunos *proxies* empíricos mostrados en su desarrollo. Bonomo y Lowenkron (2006) estiman un modelo para Estados Unidos, Brasil, Colombia y México utilizando variables macroeconómicas y un factor latente interpretado como la liquidez internacional de cada país, con datos mensuales y realizando la estimación por filtro de Kalman. Por último, Cortazar et al. (2007) estiman un modelo de 3 factores latentes para la estructura a términos de las tasas de interés reales en Chile utilizando datos de panel, de nuevo usando el filtro de Kalman.

En este documento la selección del número de factores se basa en los resultados de las pruebas de Wald y de correlación canónica de Anderson (1951). La primera evalúa si cada columna de β es 0. La segunda prueba verifica si el rango de la matriz β que denota $Cov[rx_{t+1}^{(n-1)}, v_{t+1}']\Sigma^{-1}$ es completo; y por ende, que el número de factores esta debidamente especificado.⁸ Cada prueba se describe a continuación:

- **Wald:** $H_0 : \beta_i = 0_{N \times 1}$, el estadístico utilizado en esta prueba es $W_{\beta_i} = \hat{\beta}_i' \hat{v}_{\beta_i}^{-1} \hat{\beta}_i \stackrel{H_0}{\sim} \chi_N^2$, donde i denota la i -ésima columna de β' y \hat{v}_{β_i} su matriz estimada de varianza-covarianza.
- **Correlación Canónica:** $H_0 : rank(\beta) \leq r < K$, el estadístico de esta prueba es $rk_r = -T \sum_{i=r+1}^K \ln(1 - \rho_i^2) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{(K-r)(N-r)}^2$ donde ρ_i denota la correlación canónica parcial entre V y rx condicionado a X_- para el factor $i = 1, \dots, K$.⁹ En este caso solo se analiza $r = K - 1$.

Los resultados de estas pruebas se presentan en el Cuadro 1. A partir de estos es posible concluir que existe evidencia suficiente para afirmar que el rango de esta matriz es al menos $K = 4$, lo cual indica que el modelo con 4 factores puede ser adecuado para los rendimientos colombianos.¹⁰

3.3. Estimación del Modelo de 4 Factores. En esta sección se presentan las estimaciones de los principales parámetros del modelo planteado en la ecuación (5).

⁸Dado que λ_0 y λ_1 son obtenidos a través de regresiones sobre β como puede verse en las ecuaciones (9) y (10), para identificar λ_r es necesario que β sea de rango completo.

⁹Este procedimiento implica que se debe aplicar el método de correlación canónica convencional sobre los residuales de una regresión entre V y rx en función de X_- sin incluir constante.

¹⁰Es de notar que a diferencia del modelo con 4 factores, las innovaciones del modelo estimado con 5 factores no cumplen el supuesto de no autocorrelación.

CUADRO 1. Pruebas de especificación del número de factores.

	Correlación Canónica		Wald	
	rk_{k-1}	Valor P	W	Valor P
K = 2	237.566	0.000	423.994	0.000
K = 3	253.626	0.000	2964.655	0.000
K = 4	255.558	0.000	175.624	0.000

A partir de los resultados de las pruebas para seleccionar el número de factores, se realizó la estimación en tres etapas descrita en la sección 2.2.1 utilizando los primeros 4 componentes principales. En particular, se presentan las estimaciones de los parámetros asociados a los precios de riesgo del mercado, λ_0 y λ_1 ; igualmente, se muestran algunas pruebas de hipótesis sobre estos parámetros. Los resultados obtenidos son los siguientes:

CUADRO 2. Estimación de los parámetros Λ para el modelo de 4 factores.

j	λ_0	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$	$H_0 : \lambda_j = \mathbf{0}$ Valor P	$H_0 : \lambda_{1j} = \mathbf{0}$ Valor P
CP1	-0.033 (0.024)	-0.036 (0.014)	0.044 (0.003)	-0.022 (0.132)	0.013 (0.392)	0.000	0.001
CP2	-0.080 (0.067)	-0.034 (0.420)	-0.024 (0.565)	0.080 (0.076)	-0.016 (0.741)	0.199	0.393
CP3	-0.009 (0.912)	0.077 (0.339)	-0.040 (0.622)	-0.269 (0.001)	-0.096 (0.283)	0.022	0.011
CP4	-0.032 (0.836)	-0.060 (0.694)	-0.001 (0.994)	0.097 (0.541)	-0.762 (0.000)	0.002	0.001

Nota: $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1] = [\lambda_0, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \lambda_{1,4}]$. Los valores P se encuentran entre paréntesis y corresponden a los de una prueba t para cada coeficiente. En negrilla se presentan los coeficientes significativos al 10%.

La evaluación de la significancia conjunta de los parámetros asociados a los precios de riesgo de mercado para cada uno de los componentes principales se realiza mediante un test de Wald. En esta prueba, la hipótesis nula es $\lambda_j' = \mathbf{0}_{1 \times (K+1)}$, donde λ_j denota la j -ésima fila de Λ . El estadístico utilizado es el siguiente:

$$W_{\Lambda_j} = \widehat{\lambda}_j' \widehat{\nu}_{\widehat{\lambda}_j}^{-1} \widehat{\lambda}_j \stackrel{a}{\sim} \chi_{(K+1)}^2 \quad (19)$$

Donde $\nu_{\widehat{\lambda}_j}$ corresponde a la matriz de varianzas de $\widehat{\lambda}_j$.

Adicionalmente, de acuerdo a la ecuación (5) la hipótesis nula $\lambda_{1j}' = \mathbf{0}_{1 \times K}$ se puede usar para evaluar si los factores X_t explican los excesos de retorno, $rx_{t+1}^{(n-1)}$. Esta prueba se realiza para cada uno de los componentes principales; en este caso, λ_{1j} representa la j -ésima fila de λ_1 y el estadístico utilizado es:

$$W_{\lambda_{1j}} = \widehat{\lambda}_{1j}' \widehat{\nu}_{\widehat{\lambda}_{1j}}^{-1} \widehat{\lambda}_{1j} \stackrel{a}{\sim} \chi_{(K)}^2 \quad (20)$$

Donde $\nu_{\widehat{\lambda}_{1j}}$ es a la matriz de varianzas de $\widehat{\lambda}_{1j}$.

Los valores p de las dos pruebas anteriormente presentadas se reportan en las dos últimas columnas del Cuadro 2. Estos resultados muestran que los precios de riesgo del mercado son significativos para todos los componentes principales, excepto los correspondientes al componente 2.

Por otra parte, se evalúa la significancia individual para determinar la manera como cada uno de los factores afectan a los precios del riesgo. Para el precio del riesgo asociado al primer componente (CP1) se encuentra que tanto su intercepto (λ_0) como los coeficientes asociados al factor uno y dos ($\lambda_{1,1}$ y $\lambda_{1,2}$) son significativos, lo cual indica que el intercepto y los factores relacionados con el nivel y la pendiente afectan al precio del riesgo asociado al primer componente.

En el caso de los parámetros asociados al segundo factor (CP2), tanto el intercepto (λ_0) como la curvatura ($\lambda_{1,3}$) son significativos. Para el tercer componente principal (CP3) se encuentra que el coeficiente asociado a su respectivo factor ($\lambda_{1,3}$) es significativo, indicando que los precios del tercer factor se ven únicamente afectados por la curvatura. Finalmente, para el cuarto factor (CP4) se obtiene un resultado similar al anterior. Por lo tanto, los precios del riesgo asociados a los factores 3 y 4 únicamente son funciones de variaciones en su componente principal respectivo.

Es importante notar que si el primer elemento de λ_0 es negativo, significa que los inversionistas en promedio necesitan un exceso de retorno positivo para participar de dicho portafolio, independiente de los demás factores, ya que los parámetros β asociados a los excesos de retorno son múltiplos negativos del peso que tiene cada factor sobre los rendimientos, tal como se observa en la ecuación (13).

De forma similar es posible interpretar $\lambda_{1,1}$, puesto que este precio depende también de variaciones en el primer componente principal. Por otro lado, el coeficiente positivo del factor de la pendiente ($\lambda_{1,2}$) asociado al precio del riesgo del nivel (CP1) implica que entre más empinada sea la curva de rendimiento, menores serán los excesos de retorno asociados a la misma.

3.4. Bondad de Ajuste del Modelo. En esta sección se presentan algunas medidas de bondad de ajuste del modelo utilizado.

CUADRO 3. Estadísticas descriptivas de $\hat{u}_t^{(n)}$ y $\hat{e}_t^{(n)}$ respectivamente.

	n = 12	n = 24	n = 36	n = 60	n = 84	n = 120
Errores del Rendimiento						
Media	0.030	0.026	0.029	0.052	0.046	-0.044
Desviación Estándar	0.156	0.130	0.108	0.074	0.059	0.147
Asimetría	6.016	2.893	1.237	0.608	-4.685	-2.253
Curtosis	55.296	17.950	2.739	-0.535	41.467	10.838
Errores del Retorno						
Media	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000
Desviación Estándar	0.002	0.002	0.002	0.001	0.005	0.010
Asimetría	0.185	-0.086	-0.668	-2.744	-0.924	-0.705
Curtosis	23.934	24.746	23.460	28.990	24.146	21.774

En el Cuadro 3 se muestran algunas estadísticas descriptivas de los errores de valoración de los rendimientos, $\hat{u}_t^{(n)} = Y_t^{(n)} - \hat{Y}_t^{(n)}$, y de los errores de valoración de los excesos de retorno, $\hat{e}_{t+1}^{(n-1)} = rx_{t+1}^{(n-1)} - \hat{r}\hat{x}_{t+1}^{(n-1)}$. Estos resultados muestran que para ambos casos se obtienen tanto errores como desviaciones

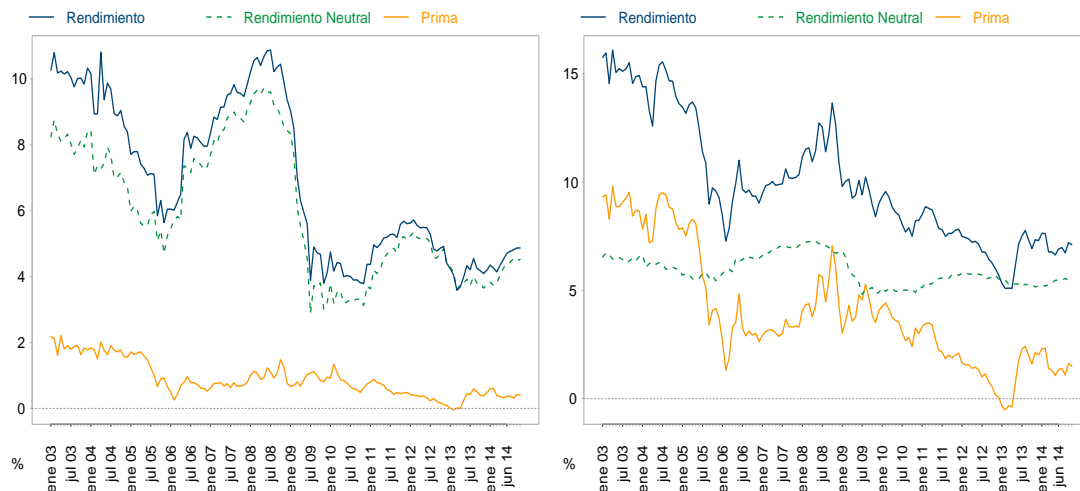
estándar pequeñas. Adicionalmente, en el Apéndice B se presenta la gráfica de los rendimientos observados y ajustados para el modelo de 4 factores. Al igual que los resultados de la tabla anterior se observa que no existen indicios de un mal ajuste del modelo.

Para verificar si el proceso iterativo utilizado para estimar la prima por vencimiento es adecuado, en el Apéndice C se muestran las gráficas comparativas entre $\hat{\beta}$ y B , donde $\hat{\beta}$ se estima en la segunda etapa del modelo y B se obtiene a través de las recursiones. Los resultados de esta gráfica muestran que estos dos términos son similares. Por lo tanto, el proceso iterativo utilizado es una aproximación adecuada de la estructura a plazo de las tasas de interés.

3.5. Estimación de la prima por vencimiento. A continuación se presenta la descomposición del rendimiento en sus dos componentes: prima por vencimiento y rendimiento de riesgo neutral.¹¹

En la Figura 1 se muestra la descomposición de la curva de rendimientos para vencimientos de 1 y 10 años, respectivamente. Estas estimaciones fueron realizadas de acuerdo al procedimiento presentado en la sección 2.2.2.

FIGURA 1. Estimación de la prima por vencimiento a 1 (izquierda) y 10 (derecha) años.



Estos resultados muestran tres hechos relevantes: en primer lugar, como era de esperarse, se observa que a mayor plazo la prima por término es mayor y más volátil. En segundo lugar, el rendimiento de riesgo neutral explica la mayor parte del movimiento de los rendimientos de los títulos en la medida en que el plazo es menor, lo cual puede asociarse a la transmisión de política monetaria (Cochrane y Piazzesi (2008), Becerra y Melo (2009)). En tercer lugar, se observa que esta prima es decreciente, lo cual se puede asociar a varios factores como la mayor profundización del mercado de títulos del Gobierno, las mejores

¹¹Es importante notar que se realizaron varios ejercicios de robustez. Primero, los datos diarios se mensualizaron de acuerdo a 5 procedimientos; como dato mensual se seleccionó el promedio de los datos diarios, y el último dato de la primera, segunda, tercera y cuarta semanas del mes. Segundo, como tasa libre de riesgo se utilizaron la tasa interbancaria y la tasa de política monetaria del Banco de la República. Y tercero, la estimación de la prima se realizó a partir de 3 y 5 componentes principales. Las primas de vencimiento obtenidas en estos ejercicios son muy similares a las presentadas en la Figura 1. Estos resultados no se presentan en este documento; sin embargo, se encuentran a disposición de los interesados.

condiciones macroeconómicas, el otorgamiento del grado de inversión por parte de las calificadoras de riesgo y las amplias condiciones de liquidez a nivel internacional. Además, se puede observar que la prima (principalmente en los tramos largos) incorpora eventos de fuerte estrés financiero como la fuerte sustitución de títulos de deuda del Gobierno por cartera por parte de bancos locales (febrero-julio de 2006), la crisis financiera internacional (septiembre-octubre de 2008) y su transmisión a economías emergentes (enero-agosto de 2009), y el anuncio por parte de la Fed de un posible inicio del "Tapering" (mayo-julio de 2013).

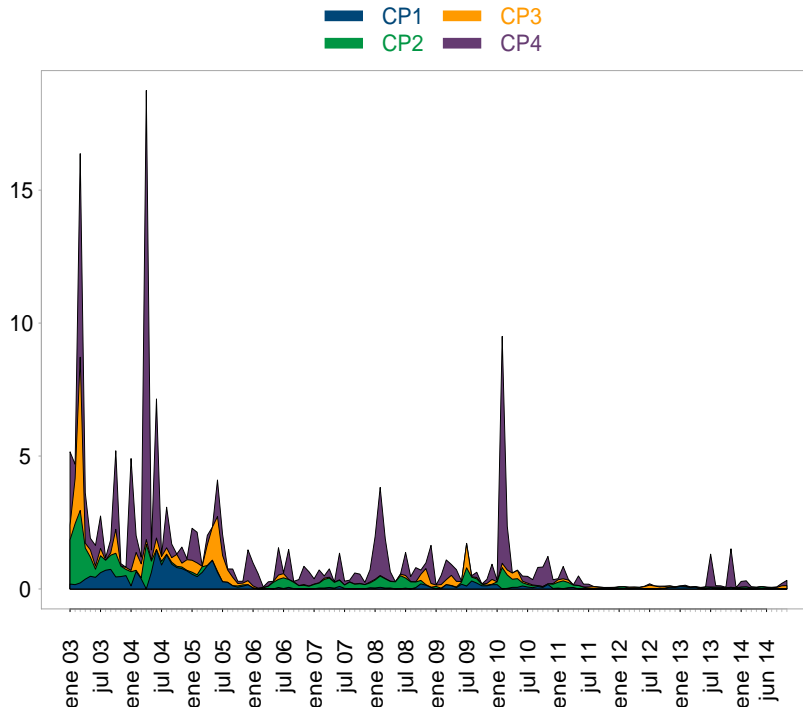
3.6. Otras descomposiciones. En esta sección se analiza la importancia de los cuatro factores dentro del modelo estimado. En particular, se realiza una descomposición de varianza para el factor de descuento estocástico y para los excesos de retorno.

3.6.1. Descomposición de la varianza del factor de descuento estocástico. Dado que los precios de mercado bajo riesgo están dados por la ecuación (3), se tiene que $\ln M_{t+1} = -r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t \Sigma^{-1/2} v_{t+1}$ y por lo tanto, es posible hallar su varianza como:

$$\text{Var}_t\{M_{t+1}\} = \lambda_t' \lambda_t = \sum_{j=1}^K \lambda_{jt}^2 \quad (21)$$

Por lo tanto, el aporte de cada factor a dicha varianza se puede encontrar como el cuadrado del precio del riesgo del factor correspondiente.

FIGURA 2. Descomposición de varianza del factor de descuento estocástico.



Los resultados de esta descomposición se presentan en la Figura 2. De esta gráfica se pueden deducir dos resultados importantes: primero, la varianza del factor estocástico ha ido disminuyendo en el tiempo, implicando que el riesgo asociado a estos bonos ha disminuido en los últimos años; y segundo, todos

los componentes analizados explican parte de la volatilidad, lo cual sugiere que incluir el cuarto factor provee información adicional, especialmente durante períodos de alta volatilidad.

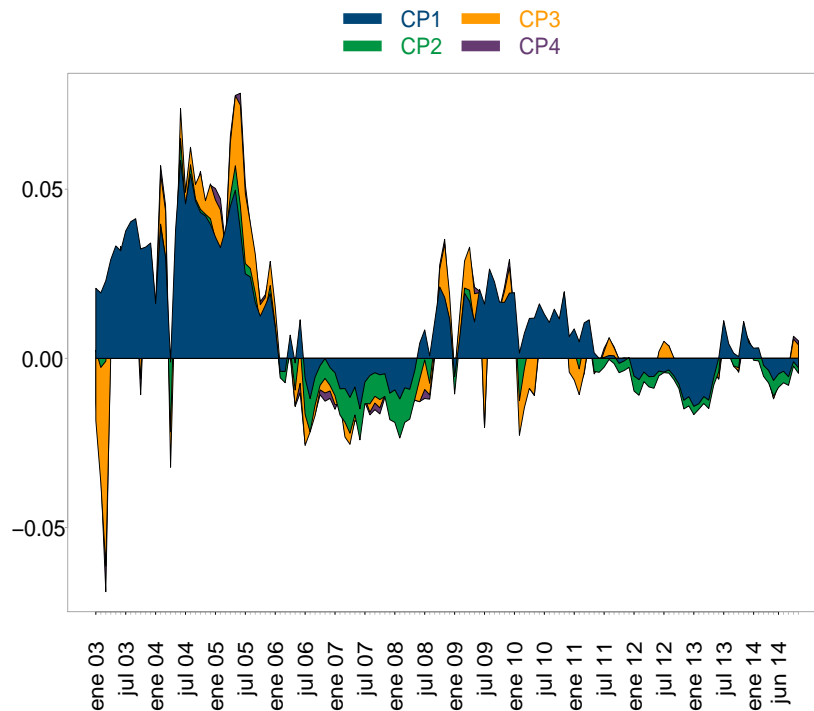
3.6.2. *Descomposición de los excesos de retorno.* A partir de la ecuación (5), el exceso de retorno esperado se puede expresar como $\beta' \Lambda Z_t$ y puede ser descompuesto de la siguiente manera:

$$(\beta'_{i1} \Lambda_1 + \dots + \beta'_{ik} \Lambda_k) Z_t \quad (22)$$

donde β_{ij} denota al j -ésimo elemento de β_i , Λ_k corresponde a la k -ésima fila de Λ y Z_t es un vector de 1 y los componentes principales del período t . De esta forma, $\beta'_{ij} \Lambda_j Z_t$ denota el aporte del j -ésimo factor al exceso de retorno esperado con vencimiento i en el período t .

La Figura 3 muestra la anterior descomposición para los excesos de retorno esperados con vencimiento a 10 años. Estos resultados indican que este valor esperado es principalmente explicado por el precio del riesgo asociado al nivel; sin embargo, se observa una importante contribución del precio del riesgo asociado a la convexidad para períodos en los cuales el exceso de retorno esperado alcanza valores muy altos o bajos. No obstante, durante la crisis del 2008 se observa que esta variable es explicada en gran parte por el precio del riesgo del factor asociado a la pendiente y marginalmente por el factor 4 y el asociado a la curvatura.

FIGURA 3. Descomposición de los excesos de retorno con maduración a 10 años.



4. COMENTARIOS FINALES

En este documento se estima la prima por vencimiento a partir de un modelo afín de 4 componentes principales, para la estructura a términos de las tasas de interés de los bonos soberanos de Colombia

en pesos emitidos en el mercado local. Se sigue la metodología propuesta por Adrian et al. (2013). Los estimadores de los precios del riesgo asociados a los componentes son significativos y los rendimientos estimados por el modelo son muy similares a los observados.

En términos generales, se puede observar que los resultados para Colombia son acordes a lo esperado. En primer lugar, se observa que a mayor plazo la prima por término es mayor y más volátil. En segundo lugar, el rendimiento de riesgo neutral explica la mayor parte del movimiento de los rendimientos de los títulos para vencimientos de corto plazo, hecho que se puede asociar a la transmisión de política monetaria. En tercer lugar, se observa una prima por vencimiento decreciente, lo cual se puede asociar a las mejores condiciones del mercado de títulos del Gobierno colombiano, la mayor estabilidad macroeconómica y las mayores condiciones de liquidez a nivel internacional. Adicionalmente, la curva refleja momentos de estrés financiero que afectan el mercado de bonos.

Cabe resaltar que la estimación de la prima por vencimiento puede ser un insumo importante para el seguimiento y análisis, principalmente por parte del banco central y de analistas financieros, del comportamiento de las tasas de interés de los bonos del Gobierno colombiano. Por lo tanto, es importante desarrollar estudios que permitan comprender los determinantes y movimientos de las primas por vencimiento, y su posible impacto sobre la política económica.

REFERENCIAS

- Abbritti, M., Dell'Erba, S., Moreno, A., y Sola, S. (2013). Global factors in the term structure of interest rates. *IMF Working Paper*, 13(223).
- Adrian, T., Crump, R., y Moench, E. (2013). Pricing the term structure with linear regressions. *Journal of Financial Economics*, 110(01):110–138.
- Anderson, T. W. (1951). Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(03):327–351.
- Arango, L. E., Melo, L. F., y Vasquez, D. M. (2002). Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia. *Borradores de Economía*, 196.
- Banco de la República (2013). Posibles implicaciones de la normalización de la política monetaria de los Estados Unidos sobre las economías emergentes. Reportes del Emisor 173, Banco de la República.
- Becerra, O. y Melo, L. F. (2009). Transmisión de Tasas de Interés bajo el Esquema de Metas de Inflación: Evidencia para Colombia. *Latin American Journal of Economics-formerly Cuadernos de Economía*, 46(133):107–134.
- Bernanke, B. S. (2006). Reflections on the yield curve and monetary policy. Discurso 175, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- Bernanke, B. S. (2013). Long term interest rates. Discurso, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- Bonomo, M. y Lowenkron, A. (2006). A term structure model for emerging economy bonds. Documento no publicado, Faculdade de economia, Universidade do Porto.
- Broner, F. A., Lorenzoni, G., y Schmukler, S. L. (2013). Why do emerging economies borrow short term? *Journal of the European Economic Association, European Economic Association*, 11(01):67–100.
- Cochrane, J. H. y Piazzesi, M. (2005). Bond risk premia. *American Economic Review*, 95(01):138–160.
- Cochrane, J. H. y Piazzesi, M. (2008). Decomposing the yield curve. Documento no publicado, University of Chicago.
- Cortazar, G., Schwartz, E., y Naranjo, L. (2007). Term-structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Financial Economics*, 12:353–369.
- Greenspan, A. (2005). Federal Reserve Board's semiannual monetary policy report to the Congress: testimony before the Committee on Banking, Housing, and Urban Affairs, U.S. Senate. Discurso 59, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Guarín, A., Moreno, J. F., y Vargas, H. (2014). An empirical analysis of the relationship between {US} and Colombian long-term sovereign bond yields. *Ensayos sobre Política Económica*, 32(74):68 – 86.
- Hamilton, J. y Wu, C. (2012). Identification and estimation of gaussian affine term structure models. *Journal of Econometrics*, 168(02):315–331.
- Joslin, S., Singleton, K., y Zhu, H. (2011). A new perspective on gaussian dynamic term structure models. *Society for Financial Studies / Oxford University Press*, pages 926–970.
- Julio, J. M., Mera, S. J., y Reveiz, A. (2002). La curva spot (cero cupon) estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos. Borradores de Economía 213, Banco de la República.
- Kim, D. H. y Orphanides, A. (2007). The bond market term premium - what is it, and how can we measure it. *BIS Quarterly Review*.
- Kim, D. H. y Wright, J. H. (2005). An arbitrage-free three-factor term structure model and the recent behavior of long-term yields and distant-horizon forward rates. *Finance and Economics Discussion Series Working Papers*.
- Kohn, D. L. (2005). Financial Market Risk Premiums. Discurso, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Labordaa, R. y Olmo, J. (2014). Investor sentiment and bond risk premia. *Journal of Financial Markets*, 18:206–233.
- Melo, L. F. y Castro, G. A. (2010). Relación entre variables macro y la curva de rendimientos. *Borradores de Economía*, 605.

- Rodrigues de Almeida, C. (2004). Time varying term premia in emerging markets: Explanation by a multi-factor affine term structure model. *International journal of theoretical and applied finance*, 7:919–947.
- Scheinkman, J. A. y Litterman, R. (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, 1(1):54–61.
- Toro, J. (2014). El relajamiento cuantitativo en los Estados Unidos y algunos efectos en Colombia. Reportes del Emisor 176, Banco de la República.
- Wright, J. (2011). Term premia and inflation uncertainty empirical evidence from an international panel dataset. *The American Economic Review*, 101(04):1514–1534.

APÉNDICE A. DERIVACIÓN DE LAS MATRICES DE VARIANZA COVARIANZA

En este apéndice se resume la derivación realizada por *ACM* para las matrices de varianza-covarianza v_β , $C_{\Lambda,\beta}$ y v_Λ , especificadas en la ecuación (11).

Sean $Z_- = [i_T \ X'_-]'$ una matriz que contiene un vector de unos y los factores X_- , $M_{\hat{V}} = I_T - \hat{V}'(\hat{V}\hat{V}')^{-1}\hat{V}$, $\rho'_1 = i'_T M_{\hat{V}} Z_- (Z_- M_{\hat{V}} Z'_-)^{-1}$ un vector de orden $(K+1) \times 1$, $A'_\beta = \text{diag}(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(1)})$ y definiendo $\kappa_{m,n}$ como la matriz de conmutación de orden $mn \times mn$ tal que para una matriz $A_{m \times n}$ se cumple que $\text{vec}(A') = \kappa_{m,n} \text{vec}(A)$. *ACM* muestran que es posible encontrar las siguientes expresiones analíticas:

$$v_\beta = \sigma^2 (I \otimes \Sigma^{-1}) \quad (23)$$

$$C_{\Lambda,\beta} = -\sigma^2 \cdot \kappa_{K+1,K} \left((\beta\beta')^{-1} \beta \otimes \Lambda' \Sigma^{-1} \right) + \sigma^2 \cdot \left(\rho_1 \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta A'_\beta \right) \quad (24)$$

$$v_\Lambda = v_{\Lambda,\tau} + C_{\Lambda,\tau} + C'_{\Lambda,\tau} \quad (25)$$

con:

$$C_{\Lambda,\tau} = - \left(\Lambda' \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta \right) \kappa_{K,N} \left[\sigma^2 \cdot (I_N \otimes \Sigma^{-1}) \right] \left(\rho_1 \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta A'_\beta (I_N \otimes \Sigma) \right) \quad (26)$$

$$v_{\Lambda,\tau} = v_{\Lambda,\tau,1} + v_{\Lambda,\tau,2} + v_{\Lambda,\tau,3} + v_{\Lambda,\tau,4} + v_{\Lambda,\tau,5} + v_{\Lambda,\tau,6} \quad (27)$$

y:

$$v_{\Lambda,\tau,1} = (\Upsilon_{zz}^{-1} \otimes \Sigma) \quad (29)$$

$$v_{\Lambda,\tau,2} = \sigma^2 \cdot \left(\Upsilon_{zz}^{-1} \otimes (\beta\beta')^{-1} \right) \quad (30)$$

$$v_{\Lambda,\tau,3} = \sigma^2 \cdot \left(\Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda \otimes (\beta\beta')^{-1} \right) \quad (31)$$

$$v_{\Lambda,\tau,4} = \sigma^2 \cdot \left(\rho_1 \rho'_1 \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta A'_\beta (I_N \otimes \Sigma) A_\beta \beta' (\beta\beta')^{-1} \right) \quad (32)$$

$$v_{\Lambda,\tau,5} = \frac{1}{4} \cdot \left(\rho_1 \rho'_1 \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta B^* (I_{K^2} + \kappa_{K,K}) \times (\Sigma \otimes \Sigma) B^* \beta' (\beta\beta')^{-1} \right) \quad (33)$$

$$v_{\Lambda,\tau,6} = \frac{\sigma^4}{2} \cdot \left(\rho_1 \rho'_1 \otimes (\beta\beta')^{-1} \beta i_N i'_N \beta' (\beta\beta')^{-1} \right) \quad (34)$$

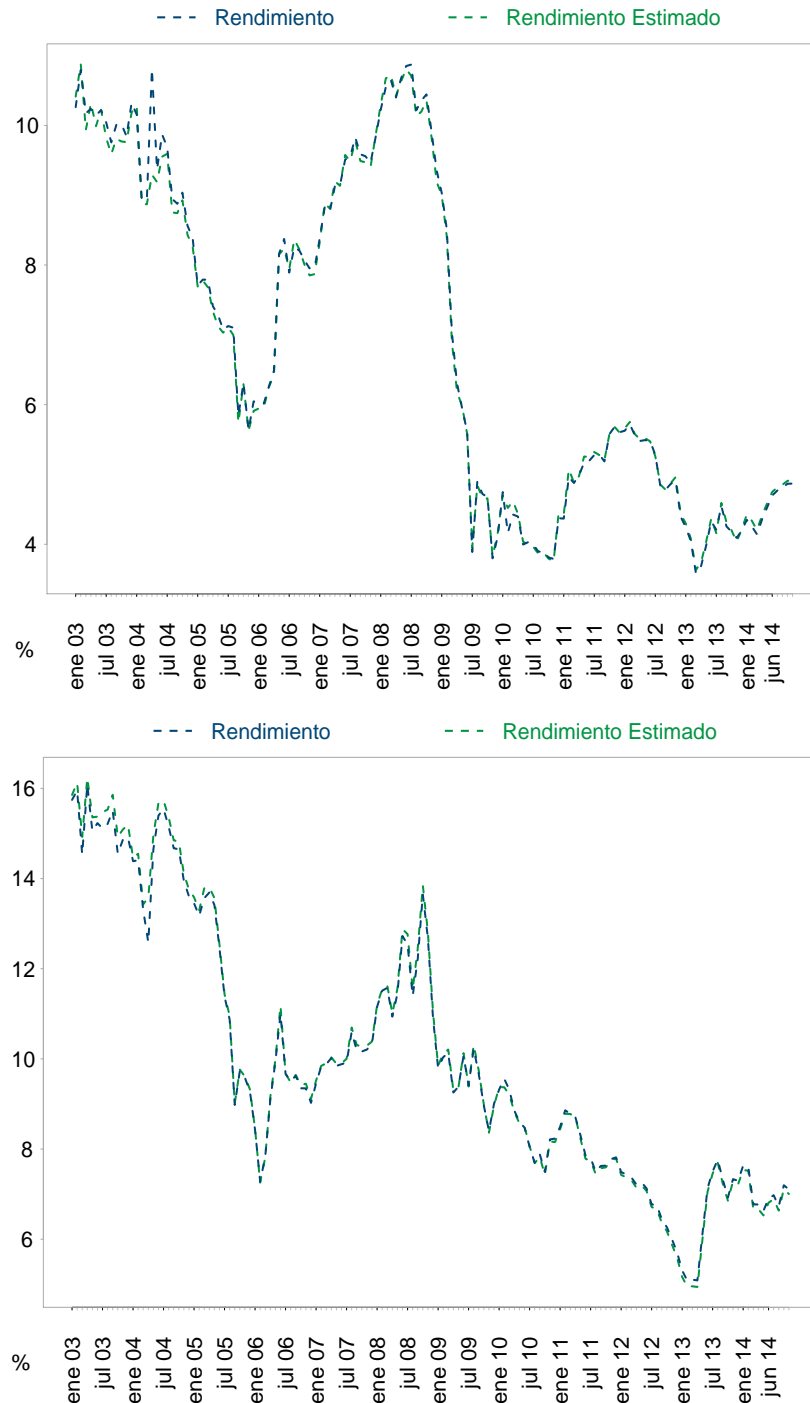
donde $\Upsilon_{zz} = \text{plim}_{T \rightarrow +\infty} (Z_- Z'_- / T)$ y $\Upsilon_{xx} = \text{plim}_{T \rightarrow +\infty} (X_- X'_- / T)$.¹²

¹²Con el objetivo de facilitar los cálculos, la ecuación (27) supone que se utilizan rendimientos centrados, es decir $\mu = 0$.

APÉNDICE B. AJUSTE DEL RENDIMIENTO.

A continuación se presentan las gráficas correspondientes a los rendimientos observados y estimados por el modelo para los vencimientos de 1 y 10 años.

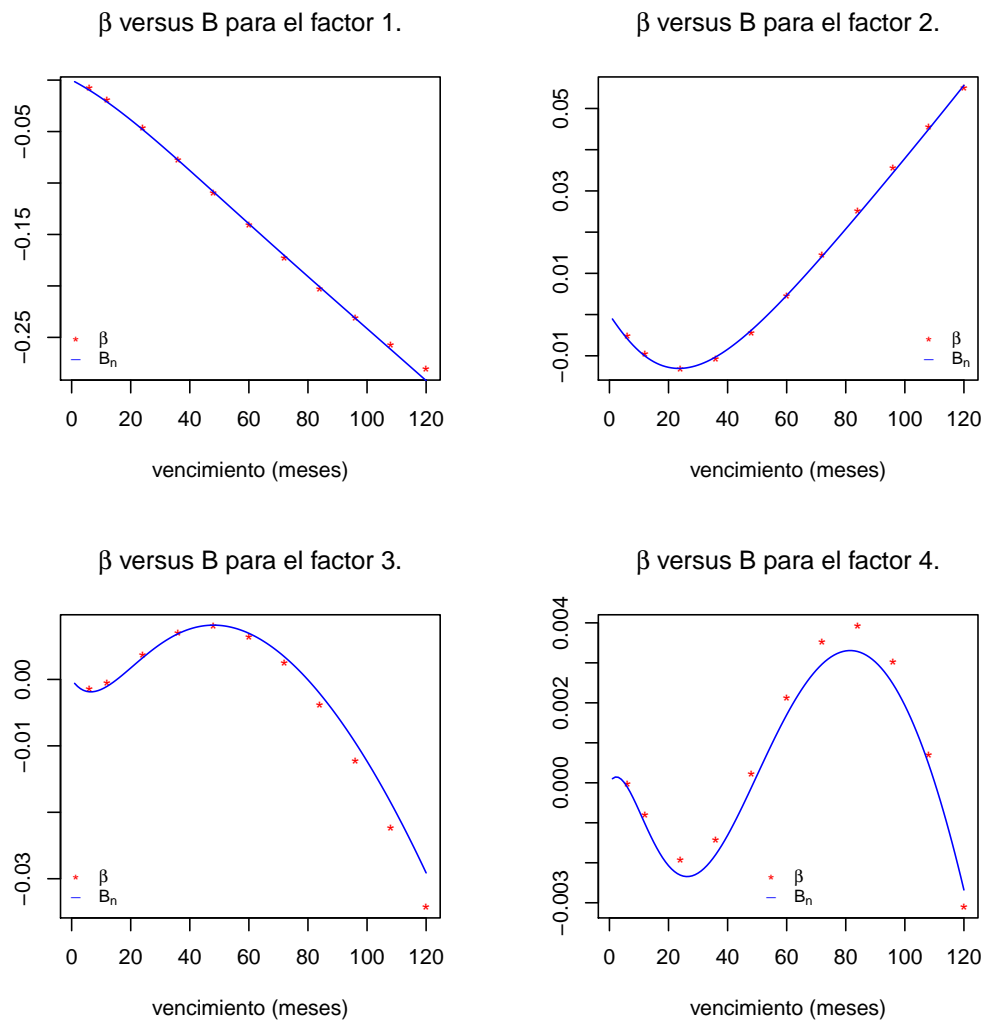
FIGURA 4. Rendimientos observados y estimados para 1 (superior) y 10 (inferior) años.



APÉNDICE C. COMPARACIÓN DE β CON B.

En las siguientes gráficas se presenta la comparación entre los parámetros β del modelo (ecuación (5)) y los parámetros B utilizados en la recursión para calcular la prima por vencimiento (ecuación (15)). Estos resultados se muestran para cada uno de los cuatro factores.

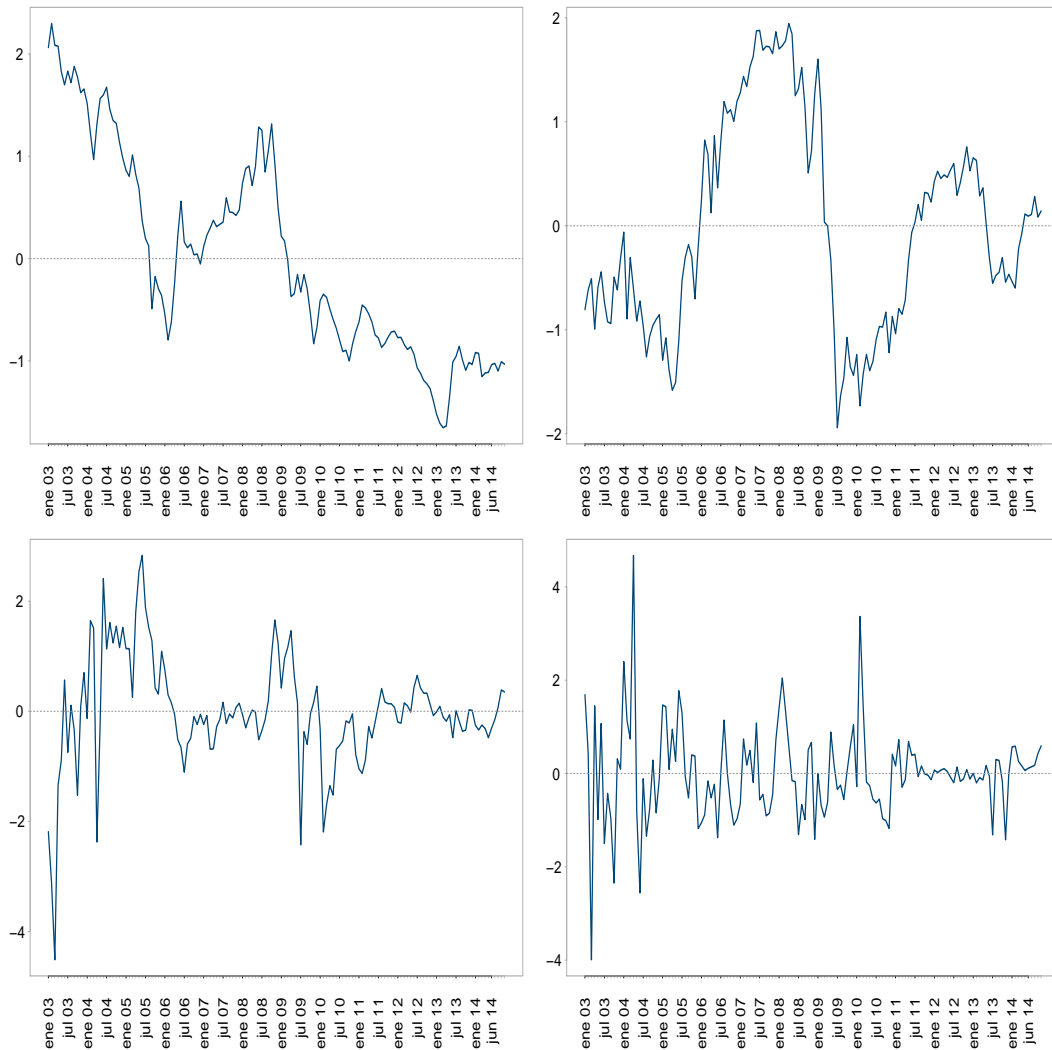
FIGURA 5. Comparación entre β y B a lo largo de la estructura a plazos por factor.



APÉNDICE D. GRÁFICAS DE LOS COMPONENTES PRINCIPALES UTILIZADOS.

En este apéndice se presentan los 4 componentes principales estimados mediante el método propuesto en la sección 2.¹³

FIGURA 6. Componentes principales.



CP1 (panel superior izquierdo), CP2 (panel superior derecho), CP3 (panel inferior izquierdo) y CP4 (panel inferior derecho).

¹³Es de notar que a partir de un análisis de datos atípicos, se corrigió el dato correspondiente al mes abril de 2004 para el segundo componente principal.