

Dependencia de largo plazo y la regla de la raíz del tiempo para escalar la volatilidad en el mercado colombiano

Por:
Carlos León
Francisco Vivas

Borradores de ECONOMÍA

Núm. 603

2010



tá - Colombia - Bogotá - Col

*Dependencia de largo plazo y la regla de la raíz del tiempo para escalar
la volatilidad en el mercado colombiano¹*



*Carlos León
Francisco Vivas*

*Banco de la República
Colombia*

¹ La serie Borradores de Economía es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

Dependencia de largo plazo y la regla de la raíz del tiempo para escalar la volatilidad en el mercado colombiano[†]

*Carlos León[‡]
Francisco Vivas^{*}
Banco de la República
Colombia*

Resumen

Es una práctica muy difundida el multiplicar la desviación estándar por la raíz del tiempo para escalarla a otros plazos. Así, con base en la estimación de la desviación estándar o del VaR (*Value at Risk*) diario, es usual obtener la desviación estándar o el VaR para un periodo de diez días como el producto de la primera y la raíz de diez.

Esta práctica, basada en la hipótesis de los mercados eficientes, supone que los cambios de los precios son independientes entre sí; es decir, que las series de tiempo no presentan memoria.

El presente documento se ocupa de estimar la presencia de memoria de largo plazo en los mercados cambiario, accionario y de renta fija colombianos, para lo cual se utiliza la metodología de rango reescalado clásico (*R/S*) y modificado (*mR/S*).

Además de encontrar persistencia significativa para el mercado accionario y de renta fija, se estima el exponente de Hurst ajustado, el cual sirve para cuantificar el error derivado de algunas prácticas basadas en el supuesto de independencia.

De acuerdo con los resultados obtenidos para dichos mercados, (i) el supuesto según el cual los precios reflejan toda la información disponible es errado; (ii) algunas prácticas en la optimización de portafolios y la valoración de activos son cuestionables, y (iii) tal como se infiere de la revisión hecha en 2009 por el Comité de Basilea a los estándares cuantitativos para el cálculo del riesgo de mercado, la regla de la raíz del tiempo subestima significativamente el riesgo.

Palabras claves: hipótesis de mercados eficientes, caminata aleatoria, caminata aleatoria sesgada, consistencia temporal de la volatilidad, exponente de Hurst, rango reescalado, IDXTES, IGBC, TRM.

Clasificación JEL: G11, G12, G13, G14, G32.

[†] Las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva. El documento se enriqueció con los comentarios, correcciones y apreciaciones de Alejandro Reveiz, Marco Ruiz y Karen Leiton.

^{*} Investigador del Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados de la Subgerencia Monetaria y de Reservas, cleonrin@banrep.gov.co o carlosleonr@hotmail.com.

[‡] Profesional Junior de la Sección de Pensiones del Departamento de Recursos Humanos, fvivasra@banrep.gov.co.

1. Introducción

Uno de los supuestos más utilizados en Economía y Finanzas es aquel que señala que el cambio en el precio de los activos se asimila al movimiento browniano, también llamado caminata aleatoria o *random walk*. Los modelos y teorías más exitosos y difundidos se basan total o parcialmente en este supuesto: el modelo de Black & Scholes (B&S) para la valoración de opciones financieras, el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) y la APT (*Arbitrage Pricing Theory*) para la valoración de activos, la teoría de portafolios basada en el espacio media-varianza de Markowitz (MPT), y la hipótesis de mercados eficientes (EMH), entre otros.

Este supuesto ha permitido modelos elegantes para la academia, y soluciones prácticas para los participantes del mercado. Una de estas soluciones consiste en escalar la volatilidad como una función conocida del tiempo, en lo que se conoce como la regla de la raíz cuadrada del tiempo (*square-root-of-time rule*).

De este modo, a partir del cálculo de la desviación estándar o del VaR (*Value at Risk*) para un día de plazo, es usual multiplicar este resultado por la raíz cuadrada del plazo en días escogido para obtener la desviación estándar o el VaR correspondiente.

Sin embargo, dado que es bien conocido que el supuesto de movimiento browniano no corresponde con la realidad, la utilización de esta regla agrega un error a la estimación de la desviación estándar o el VaR. Como es de esperar, si el grado de alejamiento respecto del supuesto de movimiento browniano es leve (alto), el error ha de ser también leve (alto).

Una primera aproximación a la estimación del error derivado de la utilización de la regla de la raíz del tiempo fue hecha por H.E. Hurst en 1951. Hurst, encargado de la enorme responsabilidad de realizar los cálculos para determinar las dimensiones óptimas de una presa en el río Nilo, corroboró que la aplicación del supuesto de movimiento browniano al comportamiento aparentemente aleatorio e independiente del flujo del río podría tener una importante consecuencia: la construcción de una presa de tamaño significativamente inferior al requerido.

Con respecto a los mercados financieros, el propósito de este documento es similar al de Hurst: corroborar si la aplicación del supuesto de movimiento browniano al comportamiento aparentemente aleatorio e independiente de los cambios de precios de los activos financieros tiene consecuencias de importancia.

Para tal fin se utiliza la metodología de rango reescalado clásico (R/S) de Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) para estimar el exponente de Hurst (H), y la metodología de análisis de rango reescalado modificado (mR/S) de Lo (1991) para calcular el estadístico

Vq , las cuales se aplican a los mercados cambiario, de renta variable y de renta fija colombianos.

Conforme con los resultados de Hurst en Hidrología, y con la literatura sobre la aplicación de ambas metodologías a mercados emergentes, los hallazgos de este documento corroboran la presencia de dependencia o memoria de largo plazo en las series correspondientes a los mercados cambiario, de renta variable y renta fija, la cual es significativa para estos dos últimos, inclusive luego de ajustar los resultados por el sesgo derivado de la utilización de series finitas.

En consecuencia, primero, no es correcto asumir que los mencionados mercados sean eficientes en sentido débil; es decir, no sólo el valor presente de una variable es relevante para predecir el futuro, ya que el pasado de la variable afecta su comportamiento presente y futuro. Ésta, lejos de ser una implicación meramente teórica, invalida supuestos de importancia para la toma de decisiones de política económica, en la que usualmente se asume que la interpretación de los eventos (v.g. noticias, resultados, decisiones, anuncios) por parte de los agentes del mercado se refleja inmediatamente en el precio de los activos financieros.

Segundo, la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo subestima el riesgo, en especial para los mercados accionario y de renta fija. De acuerdo con los resultados obtenidos, el escalar la volatilidad diaria a diez días de manera tradicional resulta en una subestimación del riesgo del 12,6%, 30,1% y 28,5% para los mercados cambiario, accionario y de renta fija locales, respectivamente, donde el grado de la subestimación se incrementa con el horizonte de tiempo.

Tercero, la evidencia de dependencia desvirtúa los fundamentos de los principales modelos de valoración de activos (v.g. CAPM, APT y B&S) y de optimización de portafolios (v.g. Markowitz y Black-Litterman). Por ejemplo, en el caso de la asignación estratégica de activos, utilizar series diarias para optimizar portafolios de largo plazo resulta en la subestimación del riesgo de aquellos activos cuyos retornos son persistentes, lo que puede sesgar de manera significativa los resultados de dicha asignación.

Este documento se compone de seis secciones además de esta introducción. La segunda se ocupa de describir brevemente los supuestos de movimiento browniano, así como la manera en que son utilizados para derivar la regla de la raíz del tiempo. La tercera describe y desarrolla la metodología de análisis de rango reescalado clásico (R/S) y modificado (mR/S) para estimar el exponente de Hurst (H) y el estadístico Vq , respectivamente; el lector conocedor de los fundamentos básicos del exponente y del estadístico antes mencionados puede obviar esta sección. La cuarta presenta los resultados del cálculo del exponente de Hurst (H) y el estadístico Vq para los mercados cambiario, accionario y de renta fija colombianos. La quinta analiza las principales implicaciones de los resultados. La última sección contiene algunos comentarios finales sobre los resultados obtenidos. Un anexo final contiene una descripción del procedimiento utilizado para el cálculo del exponente de Hurst (H) y el estadístico Vq .

2. La regla de la raíz cuadrada del tiempo

La regla de la raíz cuadrada del tiempo consiste en la multiplicación de la desviación estándar de una serie con periodicidad d por la raíz cuadrada de n , donde n es el número de periodos originales al cual se desea escalar. Por ejemplo, si σ_d es la desviación estándar calculada con base en una serie de tiempo con periodicidad d , escalar la volatilidad a un periodo dn resulta de multiplicar σ_d por la raíz cuadrada de n :

$$\sigma_{dn} = \sigma_d \sqrt{n} = \sigma_d n^{0,5} \quad [F1]$$

La utilidad de esta regla radica en que los participantes del mercado encuentran difícil obtener series de tiempo lo suficientemente extensas como para realizar estimaciones confiables de volatilidad con base en series de frecuencia inferior a un día (Dowd *et al.*, 2001). A lo anterior se suma que, inclusive cuando existen series lo suficientemente extensas, la utilización de estas puede resultar en estimaciones poco representativas.

Tal vez la aplicación más conocida de esta regla tiene que ver con el VaR. De acuerdo con los estándares técnicos originalmente establecidos por el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria (BIS, 1995), el VaR debe ser calculado para un periodo mínimo de tenencia de diez días, para lo cual se puede estimar el VaR para periodos más cortos, pero escalándolos a ese plazo, lo cual se consigue al multiplicarlo por la raíz cuadrada del tiempo². Esta práctica también sustenta uno de los estándares metodológicos para la medición de riesgo de mercado: RiskMetrics (Mina y Xiao, 2001).

De este modo, similar a [F1], el VaR calculado para una tenencia de un día se puede escalar a un periodo de diez días:

$$VaR_{10días} = VaR_{1día} \sqrt{10} = VaR_{1día} 10^{0,5} \quad [F2]$$

El origen de esta regla se encuentra en el supuesto del movimiento browniano como dinámica que explica los cambios en los precios de los activos, por el cual, para variables independientes e idénticamente distribuidas como una normal, la desviación estándar se comporta de acuerdo con $\sigma(n) \sim n^{0,5}$, donde n es el incremento en el tiempo.

El movimiento browniano proviene de la biología y la física. Su nombre se debe a las investigaciones del botánico escocés Robert Brown a principios del siglo XIX sobre el movimiento de las partículas orgánicas e inorgánicas suspendidas en un fluido, el cual él caracterizó como inexplicable, irregular e independiente (Brown, 1828 y 1829). A finales del siglo XIX Louis Bachelier (1900) fundamentó la utilización del movimiento browniano para caracterizar la dinámica de los precios de los activos financieros, la cual se mantiene como el estándar académico y práctico hasta nuestros días.

² En la última revisión hecha por el Comité de Basilea (BIS, 2009) a estos estándares aún se hace referencia a dicha regla, pero, en reconocimiento a las falencias de los modelos de riesgo de mercado en la más reciente crisis financiera, ahora se exige una justificación técnica a la entidad que la aplica. Para el caso colombiano, la reglamentación vigente de la Superintendencia Financiera aún mantiene dicha regla como de obligatoria utilización (Inciso d. del numeral 5.2.2.1. de la Circular Externa 051 de 2007).

De manera general, Mandelbrot (1963) describe la teoría de Bachelier de la siguiente manera: si $Z(t)$ es el precio de una acción o commodity en un momento t , se supone que las diferencias sucesivas de la forma $Z(t+T) - Z(t)$ son variables (i) aleatorias, (ii) independientes, (iii) distribuidas según la curva normal o de Gauss, (iv) con media cero y varianza proporcional al intervalo T .

Los anteriores supuestos han sido en su mayoría controvertidos a partir de la observación de la realidad, y rechazados utilizando pruebas de significancia tradicionales³. Como consecuencia de lo anterior, se han desarrollado modelos que buscan reconocer la realidad de los mercados. Se destacan aquellos modelos que capturan cambios en la volatilidad a través del tiempo (v.g. modelos GARCH y de volatilidad estocástica), que capturan la dependencia local o de corto plazo de las series de precios (v.g. modelos GARCH, autoregresivos o de media móvil), o que reconocen la existencia de saltos y de distribuciones con exceso de curtosis o sesgo (v.g. modelo de difusión con saltos y distribuciones *t-student* sesgadas).

Sin embargo, en muchos casos subsisten metodologías y prácticas que aún recaen en el supuesto de movimiento browniano; una de éstas es precisamente la regla de la raíz del tiempo, que es, según Sornette (2003), la predicción más importante del modelo de movimiento browniano.

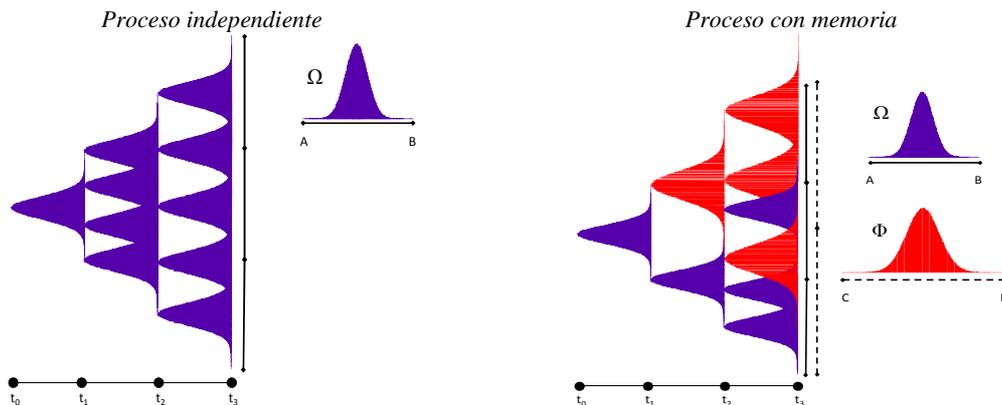
El supuesto que fundamenta la regla de la raíz cuadrada del tiempo es el de independencia. Bajo este supuesto el comportamiento pasado de la variable es irrelevante, por lo que el futuro es incierto y debe ser expresado en términos de distribuciones de probabilidad. Lo anterior corresponde a lo que se conoce también como la forma débil de la hipótesis de mercados eficientes, y es también la hipótesis central del modelo de martingalas (*martingales*) para la valoración de activos, según el cual el precio actual es el mejor pronóstico del precio futuro (Campbell *et al.*, 1997).

Bajo el supuesto de independencia, si se tiene la distribución de probabilidad del cambio de una variable para un periodo, la distribución de probabilidad del cambio de la misma variable para dos o más periodos resulta de la suma de las distribuciones de probabilidad; en el caso de la suma de dos distribuciones normales independientes, el resultado es una distribución cuya media es la suma de las medias y cuya varianza es la suma de las varianzas (Hull, 2003).

En el Gráfico 1 (izquierda) se representa lo anterior. Si la distribución de probabilidad (Ω) del cambio de una variable independiente para un periodo en el futuro tiene un rango $A-B$, el rango resultante al final de dos periodos será proporcional a 2 veces $A-B$, y para tres periodos será proporcional a 3 veces $A-B$; en este caso no es relevante si la distribución de probabilidad (Ω) es normal o no.

³ Para el caso de los factores de riesgo del mercado colombiano escogidos (TRM, IGBC e IDXTES), el lector puede referirse a León (2009).

Gráfico 1 Independencia y la regla de la raíz del tiempo



Fuente: elaboración de los autores

Si la distribución es normal, el rango $A-B$ puede ser convenientemente caracterizado por la varianza, por lo que si la distribución es del tipo $\mathcal{N} \sim (0,1)$, donde cero corresponde a la media y 1 a la varianza, luego de tres periodos la distribución de posibles valores de la variable –independiente- corresponde a $\mathcal{N} \sim (0,1 + 1 + 1)$ o $\mathcal{N} \sim (0,3)$.

Alternativamente, el rango $A-B$ puede ser caracterizado por la desviación estándar, pero, dado que esta corresponde a la raíz de la varianza, no es posible adicionarla; por lo tanto, si la distribución es del tipo $\mathcal{N} \sim (0, \sqrt[2]{1})$, donde cero corresponde a la media y $\sqrt[2]{1}$ a la desviación estándar, luego de tres periodos la distribución de posibles valores de la variable –independiente- corresponde a $\mathcal{N} \sim (0, \sqrt[2]{1 + 1 + 1})$ o $\mathcal{N} \sim (0, \sqrt[2]{3})$. Este es el origen de la regla de la raíz cuadrada del tiempo.

En ausencia de independencia la regla deja de ser válida. Como muestra el Gráfico 1 (derecha), si un retorno por encima de la media es seguido por una distribución (Φ) de mayor dispersión ($C-D > A-B$) –lo cual es un ejemplo de memoria-, ya no es posible aseverar que el rango resultante al final de dos periodos será proporcional a 2 veces $A-B$ o 2 veces $C-D$, ni que al final de tres periodos será proporcional a 3 veces $A-B$ o 3 veces $C-D$; esta imposibilidad aplica aún si las distribuciones (Φ y Ω) son gaussianas, por lo que no existiría una regla estándar para escalar el rango, la varianza o la desviación estándar como función del tiempo, y la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo resulta en un error que se incrementa con el horizonte de tiempo.

Si bien el supuesto de independencia de los retornos de los activos ha fundamentado la mayor parte de los modelos en Economía y Finanzas desde Bachelier (1900), también desde ese entonces se ha documentado su divergencia con la evidencia empírica (Sornette, 2003; Jegadeesh, 1991 y 1990; Granger, 1966; Cowles y Jones, 1937; Working, 1931; Mills, 1927; Mitchell, 1927).

Sin embargo, fue en las ciencias naturales, enfrentadas a la complejidad de los fenómenos naturales, que la inconveniencia del supuesto de independencia impulsó el desarrollo de metodologías para determinar su validez y evaluar su impacto.

3. El exponente de Hurst (H), y el análisis de rango reescalado clásico (R/S) y modificado (mR/S)⁴

La detección y medición de la memoria de largo plazo de las series estadísticas tuvo su origen en la Hidrología (Mandelbrot y Wallis, 1969a), cuando al británico H.E. Hurst (1880–1978) le fue encomendada la misión de diseñar una presa sobre el río Nilo. El primer problema que abordaría Hurst antes de emprender este proyecto sería determinar la capacidad de almacenamiento óptima de la presa para que cumpliera a cabalidad con su propósito: acumular agua en los periodos de abundancia, para desacumularla en los periodos de escasez, de forma que el río mostrase un flujo relativamente constante.

La capacidad óptima con la que se debía construir la presa dependía de los flujos que pudiera presentar el Nilo, los cuales en ese entonces se asumían simplemente como aleatorios e independientes. Sin embargo, al revisar los datos históricos del flujo del río Nilo (622 D.C. a 1469 D.C.) Hurst (1951) descubrió que éstos no podían ser descritos simplemente como aleatorios e independientes, sino que presentaban persistencia: los años de altas (bajas) descargas de agua eran seguidos por años de altas (bajas) descargas, por lo que el Nilo describía ciclos, aunque de longitud no periódica. Sus estudios lo llevarían a concluir que la evidencia no sólo contradecía el supuesto de independencia hasta ese entonces utilizado, sino que, por no exhibir una autocorrelación significativa⁵, no se enmarcaba en el análisis estadístico estándar (Peters, 1994).

Lo (1991) ilustra la importancia del hallazgo de Hurst respecto de la existencia de memoria en los flujos del Nilo. Si una presa se construye con el fin de proveer un flujo constante de 75 unidades de agua para cada periodo, las dimensiones de esta variarán de acuerdo con la dependencia o memoria de los flujos que recibe. Por ejemplo, si los flujos esperados en los cuatro periodos siguientes a su construcción fueran de 100, 50, 100 y 50 unidades, entonces la presa requeriría una capacidad mínima de 25 unidades, ya que de este modo podría proveer como mínimo 75 unidades en todos los periodos. Pero, si los flujos mostraran un mayor grado de persistencia y fueran de 100, 100, 50 y 50 unidades, entonces la presa requeriría del doble de capacidad mínima (50) para proveer igual flujo de salida.

En consecuencia, Hurst desarrolló una metodología adecuada para capturar y medir el tipo de dependencia que encontró en su labor. De manera general, la metodología consiste en el cálculo del rango de las sumas parciales de las desviaciones de una serie de tiempo con respecto a su media, reescalado por la desviación estándar (Nawrocki, 1995); en otras palabras (Peters, 1992), la metodología calcula la desviación acumulada con respecto a la media para varios periodos de tiempo, y examina como esta desviación se escala con respecto al tiempo.

El desarrollo metodológico de Hurst se basó en el trabajo de Einstein (1905) respecto del movimiento de las partículas, para el que buscó una formulación general que

⁴ El lector conocedor de los fundamentos básicos del exponente de Hurst y del estadístico Vq puede obviar esta sección.

⁵ Mandelbrot (1972), inspirado en los hallazgos de Hurst, identificó que el uso de la autocorrelación para detectar dependencia es efectivo en un entorno *gaussiano* y de corto plazo, por lo que no es apropiada para detectar dependencia de largo plazo, especialmente en entornos que se alejan de la normalidad.

describiera la distancia que una variable aleatoria cubre con respecto al tiempo. Einstein formuló originalmente que la distancia o desplazamiento medio (R) que una partícula suspendida en un fluido cubre por unidad de tiempo (n) corresponde a $R = n^{0,5}$, lo cual es equivalente a la regla de la raíz cuadrada (Peters, 1994).

Con el fin de generalizar dicha formulación, y para hacerla aplicable a movimientos diferentes al browniano, Hurst estableció que $R \sim c \times n^H$, donde c es una constante independiente de n , y H es un exponente por determinar, que corresponde a la manera en la que la distancia (R) se comporta con respecto al tiempo.

Hurst definió que la medida de distancia cubierta o recorrida por la variable en un periodo o muestra (n) estaría dada por el rango R_n [F3], donde $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ corresponde a los retornos de la variable aleatoria de la muestra y \bar{x}_n es la media de los retornos de la muestra.

$$R_n = \left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) \right) - \min_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) \right) \right] \quad [F3]$$

El rango R_n [F3] se estandariza por la desviación estándar muestral de dicho periodo (S_n), lo que resulta en el rango reescalado $(R/S)_n$ [F4]:

$$(R/S)_n = R_n / S_n \quad [F4]$$

Hurst encontró que el comportamiento de este rango reescalado se ajustaba a la dinámica de una gran cantidad de series de tiempo de fenómenos naturales, donde dicho ajuste se podía representar por medio de la siguiente relación [F5], en la cual los valores de H se encuentran acotados entre 0 y 1 ($0 < H \leq 1$), y la formulación de Einstein sería el caso particular en el que $H=0,5$:

$$(R/S)_t \sim c \times n^H \quad [F5]$$

Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) propusieron graficar esta función [F5] para diversos tamaños de muestra (n) en una doble escala logarítmica, para luego, mediante una regresión de mínimos cuadrados, obtener una aproximación al exponente H (ver Anexo 1), el cual tomará el valor de la pendiente de dicha regresión [F6]; este procedimiento [F3-F6] se conoce como el análisis de rango reescalado (R/S).

$$\text{Log}(R/S)_n = \text{Log}(c) + H \times \text{Log}(n) \quad [F6]$$

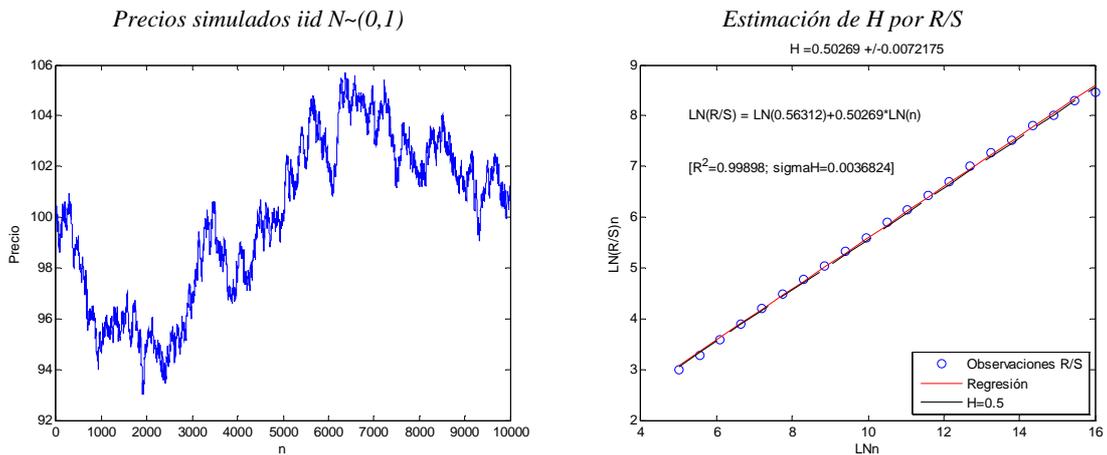
Según Mandelbrot (1965), la aplicación del R/S para series aleatorias que presenten incrementos estacionarios e independientes, tales como las caracterizadas por Brown (1828 y 1829) y Einstein (1905), resulta en $H=0,5$, inclusive si la distribución del proceso estocástico no es gaussiana, caso en el cual H se aproximará a 0,5 asintóticamente ($H \approx 0,5$). De acuerdo con Sun *et al.* (2007), en estos casos el proceso

no presenta memoria, por lo que el resultado que puede esperarse en el siguiente periodo tiene igual probabilidad de ser inferior o superior al resultado actual.

Aplicado a series de precios de activos financieros, esto implica suponer que el retorno de los activos sigue un proceso similar al de lanzar una moneda, donde la probabilidad de cara (aumento de precio) o sello (caída de precio) es la misma ($1/2$), y es independiente de todos los demás lanzamientos; esta es precisamente la base teórica de los modelos CAPM, APT, B&S y MPT.

Para corroborar las afirmaciones de Mandelbrot (1965) se utilizó el R/S con base en la simulación de un millón de números aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos como una normal⁶ ($iid \mathcal{N} \sim (0,1)$). La parte izquierda del Gráfico 2 muestra los primeros 10.000 precios simulados según el supuesto de movimiento browniano, mientras que la derecha muestra la estimación de H para la serie simulada.

Gráfico 2
Estimación de H para datos $iid \mathcal{N} \sim (0,1)$



Fuente: cálculos de los autores

En la parte derecha del Gráfico 2 no se puede distinguir fácilmente entre los valores observados de $(R/S)_n$, la línea que supone que $H=0,5$ y la línea de regresión, donde la pendiente de esta última (el H estimado) se aproxima a $0,5$ ($0,50269 \pm 0,0072175$).

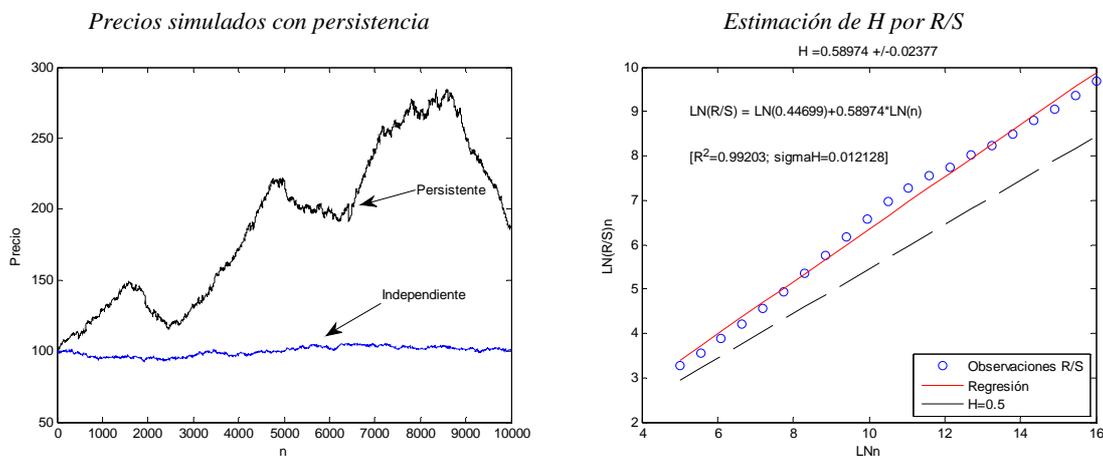
Cuando H toma un valor entre $0,5$ y 1 ($0,5 < H \leq 1$) es indicio de un comportamiento persistente, por lo que es de esperar que el resultado en el siguiente periodo sea similar al del periodo actual (Sun *et al.*, 2007). Por ejemplo, si un incremento es positivo, es

⁶ La simulación de números aleatorios hace uso de algoritmos que en realidad generan números pseudo-aleatorios, es decir, que son estadísticamente independientes de acuerdo con la mayoría de las pruebas basadas en el supuesto de normalidad, pero que luego de muchas simulaciones pueden empezar a repetirse (Peters, 1994). Pese a que el algoritmo provisto por Matlab señala que el número de simulaciones necesario para que dicha repetición se presente es del orden de $(2^{19.937}-1)/2$, siguiendo a Peters (1994) y Ambrose *et al.* (1993), se adicionó un algoritmo que se encarga de “barajar” cien veces los números pseudo-aleatorios generados antes de cada simulación, sin afectar las propiedades estadísticas de las series (v.g. se preserva la media, varianza, sesgo y curtosis). Este procedimiento se utilizó en todos los ejercicios de simulación de Montecarlo que presenta este documento.

más probable que el incremento siguiente sea también positivo (Menkens, 2007); es decir, cada evento tiene algún grado de incidencia sobre los eventos futuros.

El Gráfico 3 presenta la estimación de H para una serie de datos con persistencia, para lo cual se simuló un millón de datos aleatorios distribuidos aproximadamente como una normal, cuya tendencia se mantenía por largos periodos; esta es una –rústica– aproximación a lo que Peters (1989) denomina una caminata aleatoria sesgada, en la cual los retornos siguen una tendencia de largo plazo hasta que un evento exógeno sucede y cambia dicha tendencia. La parte izquierda compara los primeros 10.000 precios simulados bajo el supuesto de independencia (Gráfico 2) y de persistencia; la parte derecha muestra la estimación de H para la serie simulada con persistencia.

Gráfico 3
Estimación de H para datos con persistencia



Fuente: cálculos de los autores

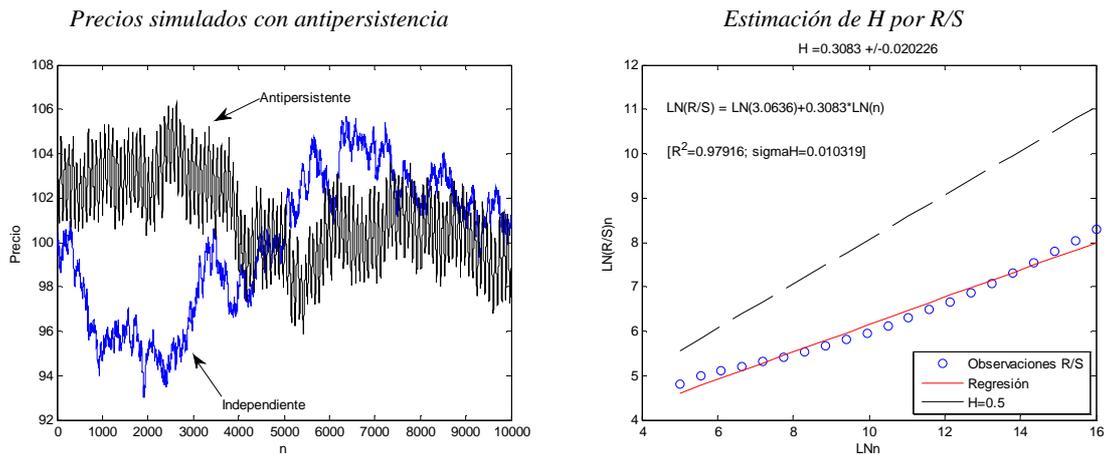
En la medida que una serie de tiempo presente un H más alto, el espectro de posibles valores futuros de la serie será más amplio que el de aquellas que se forman a partir de procesos puramente aleatorios. De acuerdo con Peters (1996), la presencia de persistencia es señal de que lo que pasa hoy no solo influencia al futuro cercano, sino también al distante.

Por el contrario, cuando H toma un valor entre 0 y 0,5 ($0 \leq H < 0,5$) es indicio de la presencia de antipersistencia. Lo anterior quiere decir, según Sun *et al.* (2007), que un retorno positivo (negativo) es seguido con mayor probabilidad por uno negativo (positivo), por lo que Mandelbrot y Wallis (1969a) señalan que los valores de la variable tienden a compensarse entre ellos, evitando que la serie se dispare rápidamente.

Aplicado a series de precios de los mercados financieros, Menkens (2007) señala que este tipo de comportamiento indicaría que el mercado sobre-reacciona de manera constante, lo que conduciría a un proceso de ajuste permanente, mientras que Peters (1996) lo relaciona con el comportamiento comúnmente conocido como de “reversión a la media”.

La parte izquierda del Gráfico 4 compara una serie de datos aleatorios, independientes y distribuidos como una normal (Gráfico 2) con una serie aleatoria con antipersistencia, mientras que la parte derecha presenta la estimación de H para esta última. La serie con antipersistencia consiste en la simulación de un millón de datos aleatorios, distribuidos aproximadamente como una normal, cuya tendencia se mantiene por periodos cortos (entre 40 y 50 observaciones), por lo que los cambios con respecto a la media tienden a corregirse o revertirse en el corto plazo.

Gráfico 4
Estimación de H para datos con antipersistencia



Fuente: cálculos de los autores

La aplicación de la metodología original de Hurst (1951) a los flujos del río Nilo resultó en un $H=0,91$, lo cual indicaba que los cambios por unidad de tiempo del sistema eran significativamente mayores a lo que supondría el movimiento browniano. Al realizar el análisis de dependencia serial tradicional, Hurst encontró que no existía una autocorrelación significativa en los primeros rezagos, por lo que descartó la existencia de dependencia de corto plazo como origen de este fenómeno; tampoco encontró una correlación significativa que decayera lenta y gradualmente al aumentar los rezagos, por lo que también descartó la existencia de dependencia de largo plazo en el sentido tradicional de Campbell *et al.* (1997). Por lo tanto, Hurst concluyó que los flujos del Nilo presentaban un tipo de memoria o dependencia de largo plazo que contradecía el supuesto de independencia hasta ese entonces utilizado, y que no se enmarcaba en los modelos de dependencia serial tradicional.

Los resultados de Hurst (1956) mostraban que 76 fenómenos naturales presentaban persistencia significativa, donde H era en promedio significativamente diferente de 0,5, y se aproximaba a 0,73 ($\sigma = 0,092$). Para el caso del flujo de los ríos, el H promedio obtenido fue significativamente mayor a 0,5 ($\mu = 0,75$, $\sigma = 0,077$), lo cual indicaba que el tamaño de una presa debía ser mayor al señalado bajo el supuesto de aleatoriedad e independencia utilizado hasta ese entonces. La discrepancia entre los hallazgos de Hurst y el supuesto de $H=0,5$ se conoce desde entonces como el fenómeno de Hurst (Sutcliffe, 1979), y H se conoce como el exponente de Hurst (Mandelbrot y Hudson, 2004).

La metodología y resultados de Hurst fueron posteriormente recogidos, corregidos y reinterpretados por Mandelbrot (1972) y Mandelbrot y Wallis (1969a, 1969b), quienes,

utilizando modelos de simulación de procesos aleatorios, comprobaron que (i) las conclusiones de Hurst (1951 y 1956) eran correctas, pero sus cálculos imprecisos; (ii) la metodología corregida (R/S) es robusta para detectar la presencia de dependencia, inclusive cuando el sesgo o la curtosis resultan en procesos que se alejan significativamente de ser normales o *gaussianos*⁷; (iii) la metodología corregida es robusta asintóticamente frente a series caracterizadas por dependencia de corto plazo (v.g. procesos autoregresivos y de media móvil); iv) $H=0,5$ asintóticamente para procesos independientes, inclusive en ausencia de normalidad, y v) a diferencia de otras metodologías, el R/S puede detectar ciclos no periódicos.

Posteriormente, al contrastar la tercera (iii) conclusión de Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) con la creciente importancia de los modelos de dependencia de corto plazo en las series –finitas- de precios de acciones, Lo (1991) introdujo la metodología de rango reescalado modificado (mR/S).

La propuesta de Lo realiza dos importantes modificaciones: (i) reemplaza la desviación estándar muestral utilizada para estandarizar el rango R_n [F4] por un estimador que incluyera la varianza y la autocovarianza de los datos hasta un rezago q , donde el orden de los rezagos busca excluir la incidencia de procesos de memoria de corto plazo en la estimación de la dependencia de largo plazo (ver Anexo 1), y (ii) por la dificultad de realizar pruebas de hipótesis sobre el exponente H estimado, desarrolla el estadístico Vq , con el cual se puede evaluar la hipótesis nula de independencia, aunque no se obtiene una estimación de la magnitud del alejamiento respecto de esta. De esta manera, Lo reconoce la utilidad del R/S , pero busca establecer si el resultado de este obedece a la existencia de dependencia de corto plazo (Campbell *et al.*, 1997).

Según estableció Lo (1991), para cada nivel de confianza existe un intervalo en el cual asintóticamente no se consigue rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo. Para un 95% de confianza, dicho intervalo está comprendido entre 0.809 y 1.862; es decir, cualquier resultado de Vq que sea inferior a 0.809 o superior a 1.862 es indicio de la presencia significativa de antipersistencia o persistencia, respectivamente.

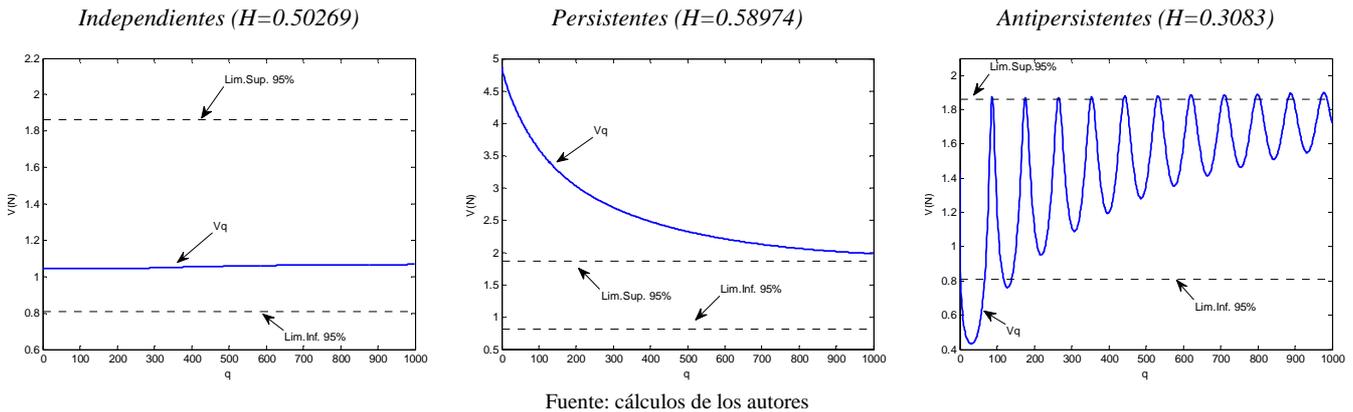
El Gráfico 5 presenta la estimación de Vq para los datos de los gráficos 2, 3 y 4. Para el caso de los datos aleatorios, independientes y distribuidos como una normal, el estadístico Vq se ubica al interior del intervalo de confianza [0.809 1,862] para los primeros mil rezagos, por lo que no es posible rechazar la hipótesis nula de independencia, lo cual corrobora el resultado del H estimado por R/S ($H=0.50269$).

Para los datos con persistencia Vq se encuentra por encima del límite superior del intervalo de confianza, por lo que es posible rechazar la hipótesis nula de independencia, lo cual, teniendo en cuenta que $H=0,58974$, corrobora la presencia de memoria de largo plazo si se consideran rezagos de hasta mil observaciones. Es importante señalar que al aumentar el orden del rezago q que se considera relevante, la metodología mR/S de Lo tiende asintóticamente a no rechazar la hipótesis nula de

⁷ Mandelbrot y Wallis (1969a) reconocen la existencia de otras metodologías, pero encuentran que solo son aplicables a procesos *gaussianos*, por lo que el R/S puede ser considerado como una metodología no paramétrica. Lo anterior es corroborado por Martin *et al.* (2003), Willinger *et al.* (1999) y Peters (1996 y 1994). En la siguiente sección, a través de la simulación de Montecarlo, se corrobora esta afirmación.

independencia –inclusive en presencia de dependencia de largo plazo–, lo cual se aprecia en la convergencia asintótica de Vq al límite superior del intervalo de confianza al 95%. Este comportamiento del estadístico Vq ha sido reconocido por varios autores (Martin *et al.*, 2003; Willinger *et al.*, 1999; Teverosky *et al.*, 1999; Nawrocki, 1995), quienes señalan la importancia de escoger un número de rezagos (q) acorde con la dinámica de la serie de tiempo.

Gráfico 5
Estimación de Vq para datos independientes, persistentes y antipersistentes



Para los datos con antipersistencia, Vq se encuentra por debajo del límite inferior del intervalo de confianza aproximadamente para los rezagos $q=[3, 66]$, por lo que es posible rechazar la hipótesis nula de independencia para este rango de q . Sin embargo, igual que en el caso de persistencia, de escoger un número considerable de rezagos, el estadístico Vq asintóticamente no rechazará la hipótesis nula de independencia. Esto resalta nuevamente la sensibilidad del mR/S respecto del orden de rezagos escogido.

Otras debilidades de la metodología mR/S y de su prueba de hipótesis de independencia son el asumir que el proceso de la variable aleatoria es de tipo gaussiano (Mandelbrot, 2003; Martin *et al.*, 2003; Brock *et al.*, 1996), y que el intervalo de confianza es de naturaleza asintótica, lo cual supone que el tamaño de la muestra utilizada y el rezago tienden a infinito (Martin *et al.*, 2003; Teverosky *et al.*, 1999; Willinger *et al.*, 1999).

Al aplicar su modificación al análisis de los precios de las acciones del mercado de los Estados Unidos en el periodo 1962-1987, Lo (1991) no encontró evidencia de dependencia de largo plazo, lo cual contradecía los hallazgos de Greene y Fielitz (1977 y 1979) y Mandelbrot (1972). De acuerdo con Clark (2005), Willinger *et al.* (1999), Teverosky *et al.* (1999) y Nawrocki (1995), y en consideración a las debilidades antes señaladas, las conclusiones de Lo parecen el resultado de la fuerte preferencia del mR/S por no rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo, inclusive si la serie en cuestión efectivamente presenta dependencia de largo plazo.

De acuerdo con Martin *et al.* (2003) y Willinger *et al.* (1999), la metodología modificada es una mejora con respecto a la original, pero la prueba de significancia es en extremo conservadora. En consecuencia, dado que las modificaciones consiguen capturar el efecto de la dependencia de corto plazo, y hacen robusta la metodología a varianzas no estacionarias y efectos ARCH (Nawrocki, 1995), ARMA y ARFIMA

(Alptekin, 2008), así como otras formas de dependencia, varios autores (Clark, 2005; Willinger *et al.*, 1999) utilizan o recomiendan utilizar el *mR/S* de Lo (1991) conjuntamente con otras, tales como el *R/S* de Mandelbrot y Wallis (1969a, 1969b).

Respecto de los resultados de ambas metodologías, Los (2003) afirma que la evidencia empírica documentada por Peters (1994) para el caso de series de precios tiende a favorecer las conclusiones de Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) y Mandelbrot (1972 y 1965) –no las de Lo (1991)- sobre la presencia de dependencia de largo plazo, aunque reconoce que todavía es prematuro concluir de manera definitiva sobre el tema.

El trabajo de Peters (1994) sobre la dependencia de largo plazo en los mercados de capitales, basado en la simulación de procesos autoregresivos (AR), de media móvil (MA) y autoregresivos de media móvil (ARMA), concluye que estos tipos de procesos no exhiben el efecto de persistencia o de memoria de largo plazo que el *R/S* captura, mientras que los procesos GARCH mostraron un efecto de persistencia marginal que no fue significativo al 5%.

En comparación con la dependencia de corto plazo en las series de precios, la literatura sobre el análisis de la dependencia de largo plazo no es abundante, donde, según Ellis (2007), el *R/S* se caracteriza por ser una metodología popular y robusta. La evidencia sobre la aplicación del *R/S* a los retornos de las series de precios de monedas, índices accionarios, títulos de renta fija y precios de productos básicos (*commodities*) señala que los retornos de los precios de los activos financieros, por lo general, se distancian del supuesto de independencia según el cual $H \approx 0,5$.

Así lo confirma la literatura documentada en la Tabla 1, la cual además sustenta la afirmación de Peters (1996) respecto de la dificultad para encontrar series de precios cuyos retornos sean antipersistentes, lo que pareciera desvirtuar el difundido concepto de reversión a la media en la Economía y Finanzas; sólo para el caso de los precios de la energía eléctrica se encontró evidencia de antipersistencia, lo cual Weron y Przybylowicz (2000) señalan puede ser consecuencia de las particularidades de este activo (v.g. complejidad en el almacenamiento, transmisión, distribución, y formación de precios).

Por lo anterior, Peters (1996 y 1989) concluye que los retornos de los activos no siguen una caminata aleatoria pura, sino que, por lo general, presentan cierto grado de persistencia ($0,5 < H \leq 1$), en lo que él denomina una caminata aleatoria sesgada; esto es, que los retornos tienden a una dirección y en una magnitud hasta que un evento exógeno ocurre y cambia dicha dirección o magnitud. La presencia de persistencia, según Peters, es muestra de que la interpretación de los eventos por parte de los inversionistas no se refleja inmediatamente en el precio –como la EMH sugiere-, sino que se manifiesta como un sesgo en los retornos, el cual puede persistir por décadas.

Tabla 1
Resultados de la estimación de H por rango reescalado clásico (R/S)

Autor	Mercado	Serie Analizada	Periodo	Frecuencia	H	Ajuste	
Peters (1992)	Acciones	S&P500 - EE.UU.	01/1950 - 06/1988	Mensual	0,780	N/A	
Ambrose <i>et al.</i> (1993)		S&P500 - EE.UU.	01/07/1962 - 31/12/1988	Diaria	0,531	1,380 †	
		S&P500 - EE.UU.	01/1950 - 07/1988	Mensual	0,622	1,490 †	
Sierra (2007)		IPC - México	04/01/1999 - 20/02/2006	Diaria	0,557	0,990 §	
		DJIA - EE.UU.	19/06/1999 - 22/05/2006		0,504	0,988 §	
Palomas (2002)		IPC - México	04/01/1988 - 11/09/2001	Mensual	0,584	0,995 §	
		IPC - México	01/1983 - 05/2001		0,713	0,976 §	
		DJIA - EE.UU.	01/1950 - 08/2001		0,658	0,994 §	
S&P500 - EE.UU.		0,686		0,993 §			
Qian y Rasheed (2004)		DJIA - EE.UU.	11/18/1969 - 12/06/1973	Diaria	0,650	N/A	
Bilel y Nadhem (2009)		S&P500 - EE.UU.	03/1990 - 09/2008	Mensual	0,525	1,400 †	
		S&PTSX - CANADÁ			0,541	1,465 †	
		CAC40 - Francia			0,537	2,088 †	
		DAX100 - Alemania			0,541	1,644 †	
		MIIB - Italia			0,505	1,644 †	
		NIKKEI225 - Japón			0,551	2,635 †	
		FTSE 100 - Inglaterra			0,511	2,420 †	
Cajueiro y Tabak (2008)		NIKKEI225 - Japón	04/01/1999 - 30/12/2005	Diaria	0,547	0,038 †	
		MERVAL - Argentina			0,584	0,040 †	
		BOVESPA - Brazil			0,612	0,040 †	
		SENSEX - India			0,591	0,040 †	
		KOSPY - Corea			0,551	0,039 †	
		IPSA - Chile			0,594	0,040 †	
		IPC - México			0,557	0,039 †	
		IGBVL - Perú			0,656	0,042 †	
		ISE - Turquía			0,538	0,036 †	
		TA-100 - Israel			0,584	0,041 †	
		FTSE100 - Inglaterra			0,521	0,039 †	
		S&P500 - EE.UU.			0,519	0,037 †	
		Jagric <i>et al.</i> (2005)			PX50 - República Checa	07/09/1993 - 03/07/2004	Mensual
BUX - Hungría			02/01/1991 - 30/06/2004	0,626	0,015 †		
WSE - Polonia			18/03/1994 - 03/08/2004	0,569	0,018 †		
RTS - Rusia			01/09/1995 - 05/08/2004	0,648	0,020 †		
SAX - Eslovaquia			03/07/1995 - 30/07/2004	0,525	0,020 †		
SBI - Eslovenia			07/01/1993 - 16/07/2004	0,656	0,017 †		
McKenzie (2001)			Mercado de acciones australiano	04/1876 - 03/1996	0,571	2,027 †	
Alptekin (2008)		Oro - Istanbul Gold Exchange	01/01/2003 - 17/03/2008	0,622	1,850 †		
Corazza <i>et al.</i> (1997)		Commodities	Futuros de maíz - CBOT	02/01/1981 - 24/10/1991	Diaria	0,600	2,100 †
			Futuros de avena - CBOT			0,760	N/A
			Futuros de soya - CBOT			0,700	N/A
			Futuros aceite de soya - CBOT			0,740	N/A
			Futuros de trigo - CBOT			0,800	N/A
Erzgraber <i>et al.</i> (2008)		Energía (NordPool) - Noruega	01/01/1999 - 26/01/2007	0,650	N/A		
Weron y Przybyłowicz (2000)		Energía (CalPX) California	01/03/1998 - 31/01/2000	Por hora	0,270	N/A	
		Energía (SWEF) - Suiza	11/03/1998 - 31/03/2000	0,439	N/A		
Batten <i>et al.</i> (1999)		Monedas	DMK/USD	17/01/1976 - 03/09/1998	Diaria	0,529	N/A
			CHF/USD			0,623	2,248 †
	JPY/USD		0,610			2,053 †	
	GBP/USD		0,609			1,954 †	
Sierra (2007)	MXN/USD	02/01/1995 - 14/02/2006	0,590	1,487 †			
Da Silva <i>et al.</i> (2007)	USD/EUR	19/06/1999 - 22/05/2006	0,526	0,994 §			
	BRL/USD	02/01/1995 - 31/08/2006	0,559	0,995 §			
Souza <i>et al.</i> (2008)	DEM/USD	27/05/1986 - 31/12/1998	Diaria	0,630	3,260 †		
	Futuros 3 meses DEM/USD			0,580	0,026 †		
	FRF/USD			0,571	0,026 †		
	GBP/USD			0,576	0,026 †		
	ITL/USD			0,567	0,026 †		
Peters (1992)	Renta Fija	Tesoros de 30 años - EE.UU.	01/1950 - 06/1988	Mensual	0,598	0,026 †	

§ Corresponde al R^2 de la regresión $[F6]$

† Corresponde al error estándar del H estimado

‡ Corresponde al estadístico Vq de Lo (1991)

‡ Corresponde al estadístico t de Couillard y Davison (2005)

Fuente: elaboración propia.

Entre las posibles explicaciones de la persistencia en el retorno de los precios de los activos financieros se encuentra el comportamiento humano, ya que este contradice el supuesto de racionalidad de varias maneras, por ejemplo: (i) las decisiones del inversionista distan de ser independientes, y se caracterizan por la no linealidad y la imitación (LeBaron y Yamamoto, 2007; Sornette, 2003); (ii) ante nueva información, los inversionistas se resisten a cambiar su percepción hasta que una nueva tendencia sea establecida de manera creíble (Singh y Dey, 2002; Peters, 1996), y (iii) los

inversionistas no reaccionan a la información de manera continua, sino de manera discreta y por bloques (Singh y Dey, 2002).

Otras explicaciones tienen que ver con el impacto del estado de la economía en la percepción de los inversionistas (Peters, 1989), con el impacto de los ciclos económicos de largo plazo (Nawrocki, 1995; Lo, 1991; Granger, 1966), y la utilización de información privilegiada (Merkens, 2007). Alternativamente, algunos autores (Bouchaud *et al.*, 2008; Lillo y Farmer, 2004), basados en la persistencia del número y del volumen de las órdenes de compra y venta de los sistemas transaccionales, encuentran que la liquidez de los mercados hace imposible el realizar todas las transacciones instantáneamente, por lo que es usual que estas se realicen fragmentadamente, lo cual hace que los precios no reflejen toda la información de manera inmediata, sino incrementalmente.

4. Estimación del exponente de Hurst (H) y del estadístico Vq para el caso colombiano

En la presente sección se busca estimar el exponente de Hurst (Mandelbrot y Wallis, 1969a y 1969b) y el estadístico Vq (Lo, 1991) para tres series de precios representativas del mercado cambiario, de renta variable y de renta fija colombianos. Las series diarias utilizadas corresponden al periodo comprendido entre el 3 de enero de 2000 y el 31 de diciembre de 2009 para la Tasa Representativa del Mercado (TRM), el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y el índice representativo del mercado de deuda pública interna (IDXTES). Adicionalmente se presentan los resultados para el índice bursátil S&P500, que, por haber sido utilizado por muchos otros autores, constituye una útil referencia para el análisis⁸.

Con el fin de determinar la significancia de los resultados, se desarrollaron varias hipótesis nulas de independencia, a las que corresponden diferentes valores esperados del exponente de Hurst, así como intervalos de confianza, los cuales se presentan a continuación.

a. Valores esperados de H , intervalos de confianza y pruebas de significancia

La estimación del exponente de Hurst (H) y del estadístico Vq requirió del desarrollo de un algoritmo que realiza los cálculos descritos en el Anexo 1, así como la implementación de varias pruebas de significancia que permitirán concluir si el alejamiento del mencionado exponente respecto del supuesto de aleatoriedad e independencia es relevante.

⁸ La TRM corresponde al promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y de venta de dólares, calculada y certificada por la Superintendencia Financiera de Colombia. El IGBC es un indicador del mercado accionario de la Bolsa de Valores de Colombia. El IDXTES es un índice de retorno total desarrollado por Reveiz y León (2010b) para el análisis del mercado colombiano de deuda pública. El S&P500 es un indicador bursátil que representa aproximadamente el 75% del mercado accionario de los Estados Unidos.

Para el caso de la metodología R/S , el exponente de Hurst (H) se calculó siguiendo los documentos de Clark (2005), Peters (1994, 1992 y 1989) y Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b), mientras que el estadístico Vq de la metodología mR/S corresponde al contenido de Teverovsky *et al.* (1999), Nawrocki (1995) y Lo (1991). Como se mencionó anteriormente, la utilización de ambas metodologías es aconsejable por la robustez de la metodología R/S ante distribuciones no gaussianas, y la robustez de mR/S ante la dependencia de corto plazo, varianzas no estacionarias y efectos ARCH, ARMA y ARFIMA.

Una de las principales dificultades de la metodología R/S consiste en la escogencia *ad-hoc* de los tamaños óptimos de los periodos utilizados (n) para calcular $(R/S)_n$ [F3]. En la literatura existe consenso al afirmar que el R/S no es confiable para periodos reducidos, ya que su utilización genera estimaciones inestables y sesgadas (Cannon *et al.*, 1997; Peters, 1994; Ambrose *et al.*, 1993). Sin embargo, no existe consenso sobre la definición del tamaño mínimo óptimo de dicho periodo (n_{min}).

Cannon *et al.* (1997) estiman que debería ser del orden de $n_{min} \geq 2^8$ (≥ 256 datos) para conseguir que la desviación estándar de sus estimaciones fuese inferior a 0,05; Mandelbrot y Wallis (1969a) utilizan para sus cálculos una ventana mínima de 20 datos; Wallis y Matalas (1970) señalan que debe contener 50 observaciones, a menos que la serie sea considerablemente larga; Peters (1994), sin desconocer el problema, reconoce que en las series financieras muchas veces no existen suficientes datos como para descartar periodos de tamaño reducido, por lo que recomienda empezar con periodos de 10 o más observaciones.

Igual sucede con el tamaño máximo óptimo de la ventana de datos (n_{max}). Cannon *et al.* (1997) y Peters (1996) reconocen que la estabilidad de las estimaciones de H disminuye al incrementar el tamaño de la ventana de datos. Por lo tanto, Cannon *et al.* aconsejan descartar la utilización de ventanas cuya extensión implica que las estimaciones se hagan sobre pocos segmentos de la serie de tiempo.

Por lo anterior, dada la ausencia de consenso sobre el tamaño óptimo de las ventanas, los cálculos de los valores esperados de H se realizarán con ocho alternativas: $n_{min}=10, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ y 1024 datos. El tamaño máximo (n_{max}) de la ventana de datos corresponderá a aquel que garantice que por lo menos existirán diez segmentos contiguos (que no se sobreponen) en los que se dividirá la serie de tiempo.

Respecto de la realización de pruebas de significancia, basado en los resultados de Ellis (2007) y Peters (1994), quienes demostraron que los valores del exponente de Hurst estimados a través del método R/S se distribuyen como una normal, se implementó un modelo de Montecarlo para estimar el valor esperado del exponente de Hurst para los tamaños de ventana mínima (n_{min}) de datos antes seleccionados.

La Tabla 2 muestra el valor esperado, la desviación estándar, el sesgo y la curtosis de H , donde estos estadísticos se estimaron a partir de la realización de 5.000 simulaciones de series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una normal *iid* $\mathcal{N} \sim (0,1)$ de 200.000 datos cada una, correspondiente a 800 años de días hábiles, aproximadamente.

Tabla 2
Estimación de H por rango reescalado clásico (R/S) para datos iid $\mathcal{N} \sim (0,1)$
(por tamaño mínimo de ventana de datos)

n_{\min} (ventana mínima)	Valor Esperado (H)	Desviación Estándar	Sesgo	Curtosis	Jarque-Bera p-value	Lilliefors test p-value
10	0,5392	0,0050	0,075	2,9573	0,0776	0,5000
16	0,5300	0,0062	-0,0229	2,9708	0,5000	0,1428
32	0,5232	0,0073	-0,0333	2,9905	0,5000	0,5000
64	0,5183	0,0089	0,0405	3,0503	0,3842	0,1764
128	0,5143	0,0107	0,0541	3,1196	0,0656	0,1531
256	0,5113	0,0131	-0,0031	2,8791	0,2139	0,4673
512	0,5094	0,0167	0,0251	2,9682	0,5000	0,5000
1024	0,5071	0,0215	-0,0016	2,9924	0,5000	0,2294

Fuente: cálculos de los autores

Similar a los resultados de Ellis (2007), Couillard y Davison (2005) y Peters (1994), existe un sesgo a sobrestimar el valor de H para ventanas mínimas (n_{\min}) de tamaño reducido, el cual tiende a desaparecer al aumentar dicho tamaño. También similar a Ellis (2007) y Peters (1994) es el hallazgo de normalidad en los valores simulados de H para las alternativas de ventana mínima (n_{\min}) utilizadas, donde las pruebas de Jarque-Bera y Lilliefors señalan que no se puede rechazar la hipótesis nula de normalidad a un nivel de significancia del 95%.

Respecto a la prueba de significancia del estadístico Vq , tal como se mencionó anteriormente, Lo (1991) estableció analíticamente que el intervalo de confianza al 95% para el no rechazo de la hipótesis nula de independencia está comprendido entre 0.809 y 1.862.

Dada la sensibilidad del estadístico Vq a la escogencia del número de rezagos q considerados como relevantes en la exclusión de procesos de memoria de corto plazo, donde al aumentar el orden de los rezagos se tiende asintóticamente a no rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo –inclusive en presencia de dependencia– (Martin *et al.*, 2003; Willinger *et al.*, 1999; Teverosky *et al.*, 1999; Nawrocki, 1995), se utilizarán seis alternativas de rezago. Las alternativas consisten en $q=0, 1, 10, 100, 1000$, así como la utilización de un q “óptimo” (q_{opt}), el cual resulta de la metodología propuesta por Lo (1991) para establecer el orden de q como una función de la dimensión de la serie de tiempo y la magnitud de la autocorrelación de primer orden⁹.

De acuerdo con lo anterior, en la Tabla 3 se presenta el H esperado para los datos aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos como una normal de la Tabla 2, así como los resultados de Vq para las diferentes alternativas de orden de rezago q .

⁹ La metodología para determinar este rezago “óptimo” (q_{opt}) es presentada por Lo (1991), con base en Andrews (1991). Si N es el tamaño de la muestra, ρ es el coeficiente autocorrelación de primer orden, y $\{\cdot\}$ es una función que aproxima al siguiente entero,

$$q_{opt} = \left\{ (3N/2)^{1/3} \times (2\rho/1 - \rho^2)^{2/3} \right\} \quad [F7]$$

Tabla 3
Estimación de Vq por rango reescalado modificado (mR/S) para datos iid $\mathcal{N} \sim (0,1)$
(por tamaño mínimo de ventana de datos)

n_{\min} (ventana mínima)	Valor Esperado (H)	V_0	V_1	V_{10}	V_{100}	V_{1000}	q_{opt}	V_{opt}
10	0,5392	1,5849	1,5849	1,5849	1,5858	1,5908	0	1,5849
16	0,5300	1,5861	1,5861	1,5859	1,5864	1,5926	0	1,5861
32	0,5232	1,5904	1,5904	1,5904	1,5913	1,5970	0	1,5904
64	0,5183	1,5763	1,5763	1,5764	1,5770	1,5822	0	1,5763
128	0,5143	1,5946	1,5946	1,5946	1,5951	1,6010	0	1,5946
256	0,5113	1,5949	1,5949	1,5950	1,5955	1,6005	0	1,5949
512	0,5094	1,5943	1,5943	1,5944	1,5950	1,5994	0	1,5943
1024	0,5071	1,5860	1,5860	1,5860	1,5861	1,5919	0	1,5860

Fuente: cálculos de los autores

El estadístico Vq esperado para cada tamaño mínimo de ventanas, independientemente de las seis alternativas de rezago utilizadas, confirma que el H esperado de esta simulación de datos aleatoria, independiente e idénticamente distribuidos como una normal corresponde al de una serie sin memoria de largo plazo.

Mandelbrot y Wallis (1969a) comprobaron que para un proceso aleatorio independiente, inclusive si este es extremadamente sesgado o de varianza infinita, el exponente de Hurst se aproxima asintóticamente a 0,5, por lo cual concluyen que la hipótesis de $H=0,5$ para series independientes es robusta con respecto a cambios en la distribución marginal de la serie de datos; Martin *et al.* (2003), Willinger *et al.* (1999) y Peters (1994 y 1996) corroboraron posteriormente dicha afirmación.

Con el fin de corroborar los hallazgos de Mandelbrot y Wallis (1969a) respecto de la robustez de R/S y del límite asintótico de $H=0,5$ en el caso de series aleatorias independientes pero no gaussianas, se aplicó dicha metodología sobre una serie de tiempo cuyas características difieren de la normalidad. Para tal fin se utilizó la serie diaria del índice S&P500 desde el 2 de enero de 1928 hasta el 22 de enero de 2010, la cual se caracteriza por su significativo alejamiento del supuesto de normalidad, donde el sesgo (-0,4588) y curtosis (22.0178) hacen posible rechazar la hipótesis de normalidad a través de las pruebas de Jarque-Bera y Lilliefors para cualquier nivel de confianza.

Utilizar esta serie para corroborar los hallazgos de Mandelbrot y Wallis (1969a) requirió de dos procedimientos. Primero, con el fin de hacer la serie lo suficientemente extensa como para analizar el comportamiento cuasi-asintótico de H se construyó una serie de retornos conformada por 10 subseries de los últimos 20.000 retornos del S&P500, con lo que se obtuvo una serie de 200.000 observaciones, la cual conserva las mismas características de la serie original (v.g. media, desviación estándar, sesgo, curtosis). Segundo, con el fin de hacer que la serie fuese independiente, similar a lo propuesto por Ambrose *et al.* (1993) y Peters (1994), se implementó un algoritmo que “barajó” la serie 5.000 veces antes de ser utilizada, sin que las características de la serie original (v.g. media, desviación estándar, sesgo, curtosis) fuesen alteradas.

Al igual que se hizo con la serie aleatoria, independiente y normal, la estimación del exponente consistió en la realización de 5.000 simulaciones sobre las series de retornos independientes del S&P500, donde antes de cada simulación se volvió a “barajar” cien veces dicha serie.

La Tabla 4 corrobora el hallazgo de Ellis (2007) y Peters (1994) de normalidad en los valores simulados de H para variables no gaussianas; también se aprecia que para este tipo de variables la convergencia asintótica a $H=0,5$ es más lenta.

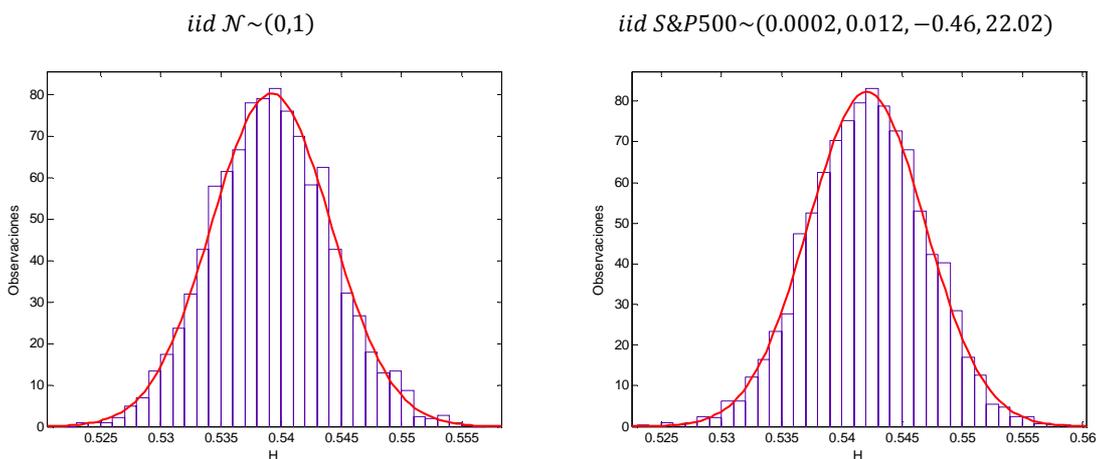
Tabla 4
Estimación de H por rango reescalado clásico (R/S) para datos iid~S&P500
(por tamaño mínimo de ventana de datos)

n_{\min} (ventana mínima)	Valor Esperado (H)	Desviación Estándar	Sesgo	Curtosis	Jarque-Bera p-value	Lilliefors test p-value
10	0,5421	0,0048	-0,0569	3,0549	0,3635	0,2991
16	0,5336	0,0062	-0,0058	3,0463	0,5000	0,5000
32	0,5279	0,0073	-0,0037	3,0005	0,5000	0,0524
64	0,5230	0,0087	-0,0016	2,9762	0,5000	0,5000
128	0,5191	0,0107	0,0107	2,9791	0,5000	0,5000
256	0,5162	0,0130	0,0062	2,9618	0,5000	0,0872
512	0,5136	0,0163	-0,0190	2,9916	0,5000	0,5000
1024	0,5107	0,0218	0,0173	3,0515	0,5000	0,4894

Fuente: cálculos de los autores

El Gráfico 6 corresponde a los histogramas de los valores simulados de H para el caso de series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una normal (izquierda) y para el caso de series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como el S&P500 (v.g. significativamente alejado de la normal). En ambos casos se evidencia la cercanía con la normalidad, por lo que se consigue corroborar la robustez de la metodología ante cambios en la distribución de las variables. Así mismo, también se aprecia el sesgo que resulta de utilizar ventanas mínimas de tamaño reducido.

Gráfico 6
Distribución de los H simulados para datos iid $N \sim (0,1)$ y iid~S&P500
(para ventana mínima de 32 datos)



Fuente: cálculos de los autores

Con los resultados de las tablas 2 y 4 se cuenta con valores esperados cuasi-asintóticos (v.g. 800 años de días hábiles) que pueden ser utilizados para determinar el grado de alejamiento respecto de la hipótesis nula de independencia de las estimaciones de H sobre las series de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500.

Sin embargo, tal como lo reconoce Couillard y Davison (2005), es importante no sólo contar con valores esperados como los antes presentados, sino desarrollar pruebas estadísticas apropiadas para distinguir entre el alejamiento con respecto a la hipótesis nula como consecuencia de la presencia de dependencia de largo plazo y el causado por el sesgo que resulta de utilizar series finitas.

Por lo anterior, además de los valores esperados de H correspondientes a los casos asintóticos y cuasi-asintóticos, se desarrollaron tres alternativas adicionales de hipótesis nula de independencia para la metodología R/S . Las seis alternativas (A, B, C, D, E, F) de hipótesis nula (Recuadro 1) pretenden establecer si existe evidencia de dependencia de largo plazo significativa en las series analizadas. Por lo anterior, se inicia desde la hipótesis asintótica tradicional ($H=0,5$), hasta aquella que considera conjuntamente el sesgo derivado de la utilización de series finitas y de las características del proceso de dichas series, por lo cual es de esperar que las primeras hipótesis sean rechazadas más fácilmente que las últimas.

Recuadro 1

<i>Hipótesis nulas alternativas de independencia</i>
A. Corresponde al H esperado en el caso asintótico [$H_{n \rightarrow \infty} = 0.5$] (Mandelbrot y Wallis, 1969a);
B. Corresponde al H esperado en el caso cuasi-asintótico de series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una normal [$H \text{ iid } \mathcal{N} \sim (0,1)$], según se presenta en la Tabla 2;
C. Corresponde al H esperado en el caso cuasi-asintótico para series aleatorias e independientes [$H \text{ iid}$] que presentan exceso de sesgo y curtosis (Tabla 4);
D. Con base en Couillard y Davison (2005), Weron (2002), Peters (1994) y Anis y Lloyd (1976), corresponde al H esperado para series finitas ¹⁰ [H_{fin1}]. Esta alternativa reconoce la existencia de sesgo positivo en la estimación de H en series finitas;
E. Corresponde al H esperado para series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una normal cuya extensión es el número de retornos observados de las series de tiempo utilizadas [H_{fin2}]. Esta alternativa reconoce la existencia de sesgo positivo en la estimación de H en series finitas;
F. Con base en Peters (1996) y Ambrose <i>et al.</i> (1993), corresponde al H esperado sobre 5.000 versiones independientes de la serie de datos original ¹¹ , donde el asterisco denota en cada caso esta modificación [$H \text{ TRM}^*$, <i>etc.</i>]. Por utilizar una versión independiente de la serie de datos original, esta alternativa reconoce la existencia de sesgo positivo en la estimación de H en series finitas, al tiempo que replica exactamente las principales características del proceso de cada una de las series analizadas (v.g. media, desviación estándar, sesgo y curtosis), con lo cual, de acuerdo con McLeod y Hipel (1978), solo resta la dependencia serial como causa del fenómeno de Hurst.

Fuente: elaboración de los autores

La Tabla 5 presenta los valores esperados y las desviaciones estándar de H para cada una de las alternativas de hipótesis nula de independencia de largo plazo antes descrita

¹⁰ El H esperado para series finitas se calcula con la fórmula desarrollada por Anis y Lloyd (1976) y Peters (1994), la cual reconoce que el valor esperado del rango reescalado $E(R/S)_n$ para una ventana de tiempo (n) presenta un sesgo positivo que crece de manera inversa con el tamaño de dicha ventana, lo que resulta, a su vez, en la sobrestimación o sesgo positivo en el H esperado para series finitas.

$$E(R/S)_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{1}{\sqrt{n\pi/2}} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}} \quad [F8]$$

¹¹ Corresponde a la estimación del H esperado con base en la simulación de 5.000 versiones independientes de la serie de datos original, donde cada versión independiente resulta de “barajar” 1.000 veces la serie original; las características de la serie original (v.g. media, desviación estándar, sesgo, curtosis) no se alteran de manera alguna.

en el Recuadro 1, así como el intervalo de confianza al 95%. Cabe resaltar que las alternativas de hipótesis nula de independencia D, E y F reconocen la existencia de un sesgo positivo no despreciable, que, de ser ignorado, puede llevar a rechazar la hipótesis nula de independencia como consecuencia de la estimación de H para series finitas, inclusive para series que no se alejan de manera significativa de la independencia de largo plazo.

Tabla 5
Valores esperados de H e intervalo de confianza¹²

Alt.	Supuesto	H Esperado	Desv. Std.	(1- α)=95%	
				Lim. Inf.	Lim. Sup.
A	$H_{n \rightarrow \infty}$	0,5000	0,0022	0,4956	0,5044
B	$H_{iid \sim N(0,1)}$	0,5232	0,0073	0,5089	0,5375
C	H_{iid}	0,5279	0,0073	0,5136	0,5422
D	H_{fin1}	0,5828	0,0063	0,5705	0,5951
E	H_{fin2}	0,5653	0,0339	0,4989	0,6317
F	H_{TRM}^*	0,5723	0,0336	0,5064	0,6382
	H_{IGBC}^*	0,5680	0,0328	0,5037	0,6323
	H_{IDXTES}^*	0,5713	0,0337	0,5052	0,6374
	$H_{S\&P500}^*$	0,5698	0,0330	0,5051	0,6345

Fuente: cálculos de los autores

La prueba de significancia utilizada es similar a la propuesta por Ellis (2007) y Couillard y Davison (2005). En consideración a que la distribución de H es normal, inclusive para variables aleatorias que no lo son, se calcula un estadístico t [F9], donde H es el valor estimado del exponente de Hurst según el método R/S , $\hat{\mu}(H_i)$ es el valor esperado de H para cada una de las alternativas de hipótesis nula de independencia del Recuadro 1 ($i=A, B, C, D, E, F$), y $\hat{\sigma}(H_i)$ es la desviación estándar de H para cada una de las alternativas de hipótesis nula de independencia.

$$t_i = \frac{H - \hat{\mu}(H_i)}{\hat{\sigma}(H_i)} \quad [F9]$$

De manera convencional, en aquellos casos en que t_i exceda $\pm 1,96$ ($\pm 2,576$) será posible rechazar la hipótesis nula de independencia i al 95% (99%) de confianza.

b. Estimación del exponente de Hurst (H) y del estadístico Vq

Los parámetros estadísticos básicos de los retornos diarios de cada una de las series analizadas se presentan en la Tabla 6. Como es usual encontrar en las series diarias de retornos de activos financieros, la media del proceso es cercana a cero, la volatilidad

¹² La desviación estándar de H para las alternativas B, C, E y F se obtuvo a partir de las simulaciones realizadas. La desviación estándar de la alternativa A corresponde a la utilizada por Peters (1989) para el caso asintótico $\hat{\sigma}(H_A) \approx 1/\sqrt{n}$, donde se supuso que $n=200.000$. La alternativa D corresponde a la utilizada por Couillard y Davison (2005) para series de tiempo finitas, $\hat{\sigma}(H_D) \approx 1/en^{1/3}$, donde n corresponde al número de observaciones de las series de tiempo analizadas.

domina a la media, y el exceso de curtosis y el sesgo resultan en un alejamiento significativo con respecto al supuesto de distribución normal o de tipo gaussiano.

Tabla 6
Parámetros Estadísticos Básicos
(sobre retornos diarios enero/00 – diciembre/09)

	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500
Media	0,0000	0,0010	0,0006	- 0,0001
Desviación Estándar	0,0068	0,0144	0,0033	0,0140
Sesgo	0,0555	0,0173	- 0,7501	- 0,1029
Curtosis	12,3457	16,6181	14,0028	10,6345
Jarque-Bera (p-value)	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
Lilliefors (p-value)	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010

Fuente: cálculos de los autores

Para la estimación de H sobre las series de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500 se utilizaron ventanas mínimas (n_{min}) de 32 datos. Esta selección obedece a tres motivos: primero, es necesario reconocer la dificultad de trabajar con series de tiempo de baja y mediana extensión (Peters, 1994); segundo, es conveniente utilizar ventanas que consigan estimaciones con errores estándar reducidos (Cannon *et al.*, 1997); tercero, es necesario escoger una ventana mínima lo suficientemente extensa como para minimizar la dependencia de corto plazo (Nawrocki, 1995).

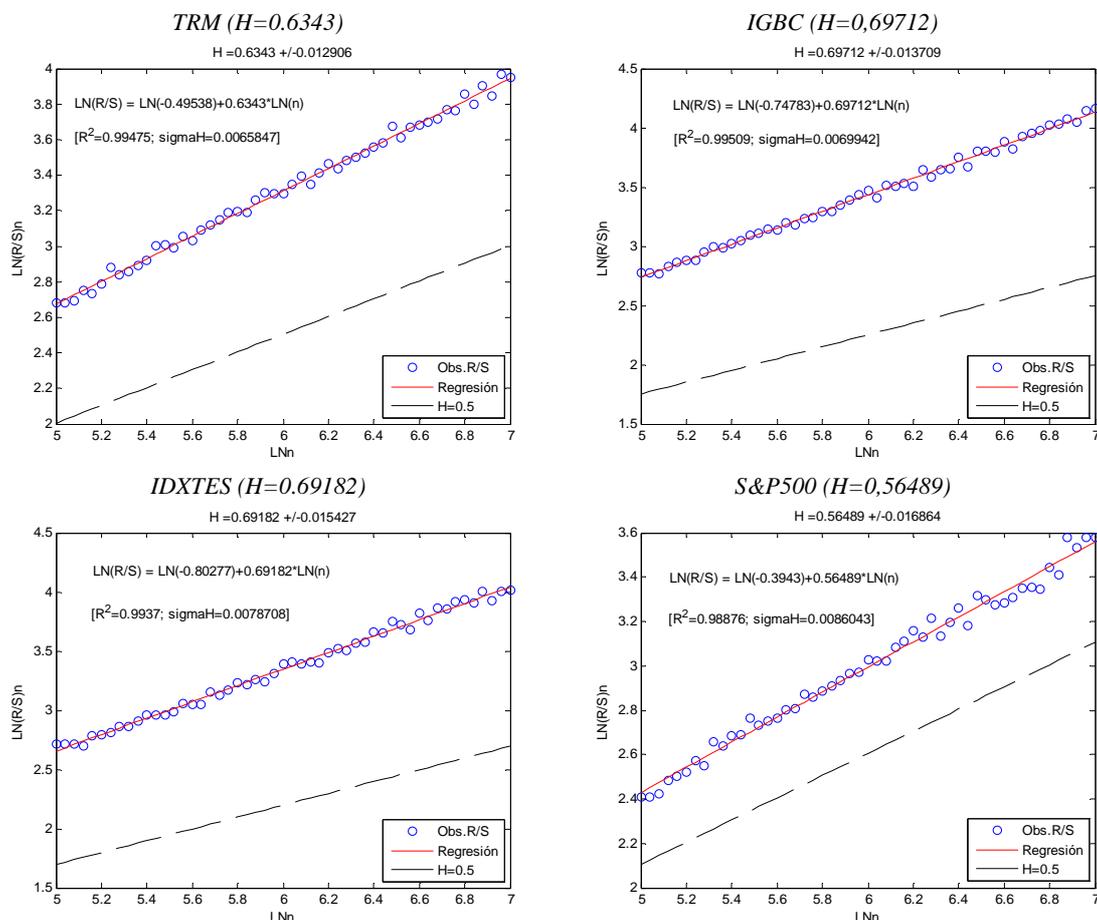
La selección de ventana mínima (n_{min}) de 32 datos reconoce que las series analizadas son de mediana extensión¹³, aunque es superior a la recomendada por Peters (1994) y a la utilizada por Mandelbrot y Wallis (1969a), de 10 y 20 datos, respectivamente. Respecto a la magnitud de los errores estándar de las estimaciones, pese a que la selección de 32 datos como límite inferior para las estimaciones es considerablemente menor a la recomendada por Cannon *et al.* (1997), quienes utilizan una ventana mínima de 256 datos ($n_{min} \geq 2^8$) para obtener estimaciones cuya desviación estándar fuese inferior a 0,05, la desviación estándar de los H estimados para las series de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500 con ventana mínima de 32 datos ($n_{min} \geq 2^5$) siempre resultó inferior a 0,01. Por último, utilizar 32 observaciones diarias permite considerar un número de rezagos superior al utilizado comúnmente para el análisis de autocorrelación en series diarias.

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se presenta la estimación de H para cada una de las series antes mencionadas (Gráfico 7), con una ventana mínima (n_{min}) de 32 datos¹⁴. Para el caso de los H estimados, los resultados para la TRM, IGBC y IDXTES señalan la existencia de persistencia, mientras que para el S&P 500 esta parece existir, aunque en una magnitud comparativamente inferior.

¹³ La selección de la serie de tiempo (2000-2009) para los cuatro activos obedece a dos razones. La primera tiene que ver con que el régimen de tipo de cambio en Colombia pasó de un sistema de bandas a un sistema de libre flotación en septiembre de 1999, por lo que la información anterior corresponde a un régimen diferente. La segunda, por la iliquidez del mercado de deuda pública interna antes del 2000, el IDXTES solo está disponible a partir de enero de ese año (Ver Reveiz y León, 2010b).

¹⁴ Los resultados para ventanas mínimas de 10, 16 y 64 datos se presentan en el Anexo 2. Las conclusiones no son diferentes a las obtenidas utilizando ventanas mínimas de 32 datos.

Gráfico 7
Estimación de H por rango reescalado clásico (R/S)



Fuente: cálculos de los autores

La Tabla 7 presenta los resultados de la estimación de H para cada una de las series analizadas, así como el cálculo del estadístico t para cada una de las seis alternativas de hipótesis nula descrita en el Recuadro 1, donde la ventana mínima (n_{min}) corresponde a 32 datos. En aquellos casos en que t exceda $\pm 1,96$ ($\pm 2,576$) será posible rechazar la hipótesis nula de independencia al 95% (99%) de confianza; según se mencionó anteriormente, dado que solo las últimas alternativas consideran el sesgo derivado de la utilización de series finitas y de las características del proceso de dichas series, es de esperar que las primeras hipótesis sean rechazadas más fácilmente que las últimas.

Tabla 7
Estimación de H por rango reescalado clásico (R/S) y pruebas de significancia*

Serie	H Estimado	$t_{i(1-\alpha)=95\%}$					
		A	B	C	D	E	F
TRM	0,6343	60,059	15,219	14,575	8,186	2,035	1,845
IGBC	0,6971	88,157	23,825	23,181	18,174	3,889	3,937
IDXTES	0,6918	85,783	23,098	22,454	17,330	3,732	3,576
S&P 500	0,5649	29,019	5,711	5,067	-2,847	-0,012	-0,149

(*) En negrilla aparecen aquellos casos en que se puede rechazar la hipótesis nula de independencia al 95%.

Fuente: cálculos de los autores

Los resultados de la Tabla 7 muestran que para la alternativa A, consistente en el límite asintótico en el cual $H=0,5$, para los cuatro factores de riesgo se consigue rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo. Este resultado era el esperado, ya que las series utilizadas son finitas, por lo cual existe un sesgo en la estimación de H , tal como se documentó anteriormente.

Para las alternativas B y C, cuyos valores esperados y desviación estándar de H se estimaron a partir de la simulación de 5.000 series de 200.000 datos, los cuatro factores de riesgo también consiguen rechazar la hipótesis nula. Similar al caso de la alternativa A, este resultado era el esperado, ya que corresponde a la estimación de H sobre una serie de longitud considerable, la cual consigue reconocer el sesgo propio de las series finitas, pero que aún así se aproxima al caso asintótico ($H_B=0,5232$ y $H_C=0,5279$).

La alternativa D, la cual consiste en el H esperado para series independientes finitas (Peters, 1994; Anis y Lloyd, 1976), reconoce el sesgo por la utilización de series finitas, pero aún consigue rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo para todos los factores de riesgo considerados. Pese a que el H esperado en caso de independencia es el más alto de todas las alternativas ($H_D=0,5828$), la desviación estándar –la cual se aproxima de acuerdo con Couillard y Davison (2005)- es reducida, por lo que el intervalo de confianza es también reducido [0,5705, 0,5951], lo que resulta en la posibilidad de rechazar la hipótesis nula con cierto grado de facilidad.

Respecto a la alternativa E, correspondiente al H esperado para 5.000 series aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una normal, cuya extensión es el número de retornos observados de las series de tiempo utilizadas, se consigue rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo para los casos del índice IGBC y del IDXTES al 99% de confianza, mientras que para la TRM se consigue rechazar al 95%; el rechazo de esta alternativa es relevante por cuanto considera el sesgo en la estimación de H para series finitas. En el caso del índice S&P500 se puede señalar que la divergencia con respecto a la mencionada hipótesis nula es despreciable.

Por último, para la alternativa F, consistente en la estimación del valor esperado de H respecto de la simulación de 5.000 versiones independientes de cada serie original, es posible rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo al 99% de confianza para el IGBC y el IDXTES. Para la TRM y el S&P500 no se consigue rechazar la hipótesis nula al 95%, donde el grado de alejamiento de este último con respecto a supuesto de independencia de largo plazo es –otra vez- despreciable.

Dado que en el caso del IGBC e IDXTES se rechazan las seis alternativas de hipótesis nula de independencia, inclusive aquellas que reconocen la existencia de sesgo por la utilización de series finitas y que replican exactamente las principales características del proceso de sus retornos (v.g. media, desviación estándar, sesgo y curtosis), es posible afirmar que estas no siguen una caminata aleatoria. En consideración a la magnitud y dirección del alejamiento con respecto a las alternativas, es posible señalar que las dos series presentan persistencia significativa.

En el caso de la TRM, pese a rechazar las alternativas A, B, C, D y E al 95% de confianza, la imposibilidad de rechazar la alternativa F hace que los resultados no sean

concluyentes, por lo que la utilización de la metodología mR/S puede ser de utilidad para concluir al respecto. En el caso del índice S&P500, la imposibilidad de rechazar las alternativas E y F parece ser un indicio de la ausencia de dependencia o memoria de largo plazo.

Adicionalmente, en atención a las críticas sobre la dificultad para distinguir entre independencia de corto y largo plazo al utilizar R/S para estimar el exponente de Hurst (H), a continuación (Tabla 8) se presentan los resultados de Vq para cada serie, para las diferentes opciones de rezago escogidas ($q=0, 1, 10, 100, 1000, q_{opt}$).

Tabla 8
Estimación de Vq por rango reescalado modificado (mR/S)*

	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500
V_0	1,7634	3,9658	8,7935	1,1943
V_1	1,6434	3,6705	8,368	1,2493
V_{10}	1,5763	3,3486	7,5658	1,4024
V_{100}	1,2722	2,9972	7,1501	1,3587
V_{1000}	1,4109	2,6589	5,7885	1,6817
q_{opt}	7	7	5	0
$V_{q_{opt}}$	1,5769	3,4263	7,9411	1,1943

(*) En negrilla aparecen aquellos casos en que se puede rechazar la hipótesis nula de independencia al 95%.
Fuente: cálculos de los autores

De acuerdo con la tabla anterior, y en consideración al intervalo de confianza para el no rechazo de la hipótesis nula de independencia de largo plazo [0,809, 1,862], es posible rechazar la hipótesis nula de independencia para el IGBC e IDXTES para cualquiera de los rezagos seleccionados. Para la TRM y el S&P500 los Vq estimados no permiten, en ningún caso, rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo.

De la Tabla 8 también se puede destacar que el orden de rezago óptimo (q_{opt}) es significativamente inferior en todos los casos al tamaño de la ventana mínima utilizada ($n_{min}=32$), por lo que dicho tamaño se puede considerar suficientemente extenso como para minimizar el impacto de la dependencia de corto plazo en el resultado del H estimado, tal como lo recomienda Nawrocki (1995).

Por lo anterior, según los resultados de las estimaciones de H y Vq para las series consideradas, así como las pruebas de significancia implementadas, es posible rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo para el caso del IGBC e IDXTES, donde esta dependencia se manifiesta en la forma de persistencia. En el caso del S&P500, la imposibilidad de rechazar las alternativas de hipótesis nula E y F, así como el resultado del Vq estimado, señalan que no se puede rechazar la hipótesis de independencia de largo plazo. Para la TRM, el resultado de las pruebas de significancia de las alternativas de hipótesis nula no son concluyentes, y el resultado del Vq estimado no consigue rechazar la hipótesis nula correspondiente al mR/S , por lo que se considera prudente no descartar que los retornos de la tasa de cambio peso-dólar se aproximan a los de una caminata aleatoria.

Los resultados obtenidos concuerdan con los hallazgos de otros autores respecto de la dependencia de largo plazo de los retornos de los activos financieros. Por ejemplo, consistente con Cajueiro y Tabak (2008), la persistencia en el retorno del IGBC se enmarca en la menor eficiencia de los mercados de los países emergentes frente a los de los países desarrollados; Cajueiro y Tabak estiman que el H promedio de los retornos de los mercados bursátiles de América Latina y Asia son de 0,6 y 0,584, mientras que el de Estados Unidos y el Reino Unido son de 0,519 y 0,521, respectivamente.

En relación con el índice S&P500, los resultados obtenidos concuerdan con los de Couillard y Davison (2004) y Ambrose *et al.* (1993) en la imposibilidad de rechazar la hipótesis nula de independencia de largo plazo para el mencionado índice accionario de los Estados Unidos. Menkens (2007) y Lo (1991) llegan a conclusiones similares respecto de dicho mercado, pero basados en el análisis del Dow Jones Industrial Average y de las bases de datos del Center for Research in Security Prices (NYSE, AMEX y NASDAQ), respectivamente.

Por último, con el fin de poder utilizar los resultados de los H estimados, en la Tabla 9 se presentan los H estimados ajustados por el sesgo resultante de la utilización de series finitas ($Hadj$), donde dicho ajuste corresponde a lo desarrollado por Anis y Lloyd (1976) y Peters (1994)¹⁵.

Tabla 9
Estimación de H y $Hadj$

Serie	H Estimado (H)	H ajustado ($Hadj$)
TRM	0,6343	0,5515
IGBC	0,6971	0,6143
IDXTES	0,6918	0,6090
S&P 500	0,5649	0,4821

Fuente: cálculos de los autores

Tal como se describió anteriormente, el H esperado de Peters (1994) y Anis y Lloyd (1976) para series independientes y finitas ($Hfin1$) consiste en utilizar una aproximación funcional al cálculo del rango reescalado esperado para dicho tipo de series, el cual se utiliza en la regresión [F5] propuesta por Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) para obtener el H estimado en el caso de una serie aleatoria, independiente y finita. De acuerdo con lo anterior, los H ajustados ($Hadj$) resultan de la siguiente fórmula:

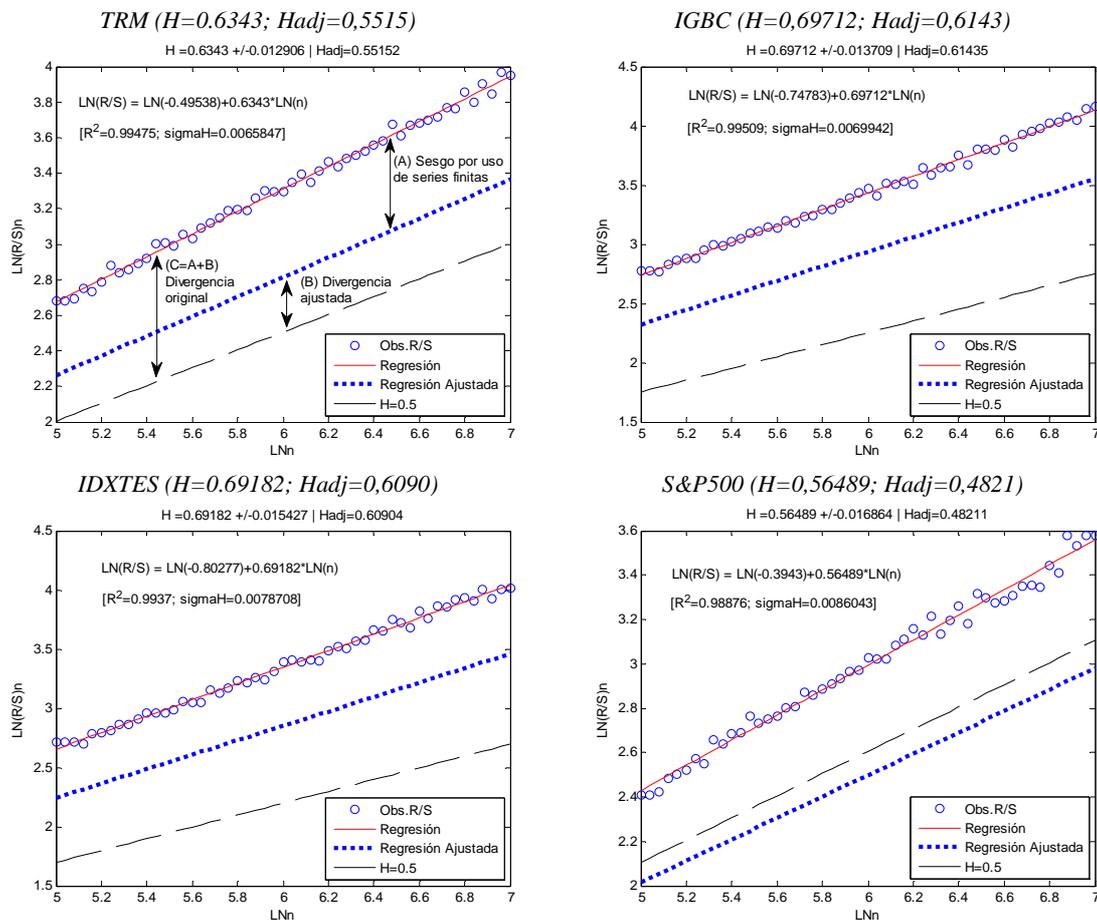
$$Hadj = H - (Hfin1 - 0,5) \quad [F10]$$

El término entre paréntesis de la fórmula anterior corresponde a la estimación del sesgo como consecuencia de la utilización de series finitas, el cual en el caso de las series utilizadas es de 0,0828. A continuación se presenta gráficamente el H y $Hadj$ para los cuatro factores de riesgo, para ventanas mínimas (n_{min}) de 32 datos¹⁶.

¹⁵ El factor de ajuste podría haberse calculado alternativamente a partir de la diferencia entre $H=0,5$ y el H esperado de las alternativas de hipótesis nula E o F. Sin embargo, además de su soporte metodológico (Couillard y Davison, 2005; Weron, 2002; Anis y Lloyd, 1976; Peters, 1994), se escogió la alternativa D por cuanto su sesgo es el más alto, y es, por tanto, la opción más conservadora.

¹⁶ En el Anexo 2 se presenta el $Hadj$ para otros valores de ventana mínima de datos.

Gráfico 8
Estimación de H y Hadj por rango reescalado clásico (R/S)



Fuente: cálculos de los autores

Se observa en todos los casos que al ajustar H por el sesgo resultante de la utilización de series finitas (rango A en el gráfico de la TRM) la divergencia con respecto al supuesto de independencia disminuye. En el caso del IGBC y del IDXTES la divergencia con respecto a $H=0,5$ se reduce, pero aún es relevante, mientras que para la TRM disminuye a menos de la mitad, y para el S&P500 la divergencia se hace irrelevante; vale la pena mencionar que en este último caso el ajuste resulta en que $H_{adj} < 0,5$, por lo que existen indicios de antipersistencia, los cuales son consistentes con los signos negativos de las pruebas de significancia de la Tabla 7, aunque su magnitud y el Vq señalan que dicha antipersistencia dista de ser significativa.

La utilización de los H ajustados (H_{adj}) evita sobrestimar la magnitud del alejamiento respecto de la hipótesis nula de independencia como consecuencia del sesgo derivado de la utilización de series finitas, lo que a su vez permite utilizar las estimaciones con el fin de evaluar cuantitativamente el impacto de la dependencia de largo plazo en los principales modelos de valoración de activos y optimización de portafolio.

5. Principales implicaciones

Las implicaciones derivadas de los resultados obtenidos son varias, y van desde el rechazo a la EMH hasta la inconveniencia de utilizar varias de las prácticas más comunes en medición de riesgo y administración de portafolios.

Las consecuencias de la existencia de dependencia o memoria de largo plazo en los retornos de los activos financieros fueron señaladas por Lo (1991), quien resaltó que socavaría muchos de los paradigmas de las finanzas modernas. Entre las consecuencias señaladas se encuentra que las decisiones de consumo, ahorro e inversión óptimas se hacen extremadamente sensibles al horizonte de tiempo; la inconsistencia de los modelos basados en procesos estocásticos continuos para la valoración de derivados, así como la invalidez del CAPM y la APT.

Por otra parte, Malevergne y Sornette (2006) señalan que la presencia de dependencia de largo plazo contribuye a explicar la lenta convergencia de la distribución de los retornos de los activos financieros hacia la normalidad, donde la mencionada lentitud se evidencia en que inclusive para retornos mensuales el exceso de curtosis es significativo. Por lo tanto, de acuerdo con Malevergne y Sornette (2006) y Los (2005), no basta con utilizar modelos que capturen la presencia de eventos extremos en la distribución de los retornos: es necesario también capturar su dependencia.

De acuerdo con lo anterior, a continuación se desarrollan las principales implicaciones de los resultados obtenidos, las cuales tienen que ver con (i) la eficiencia del mercado; (ii) la valoración de activos; (iii) la optimización de portafolios, y (iv) la medición del riesgo.

a. La dependencia de largo plazo y la eficiencia de mercado

La implicación más general es el rechazo a la hipótesis de mercados eficientes (EMH) para el caso de los mercados accionario y de renta fija colombianos, los cuales se aproximaron a través de los índices IGBC e IDXTES. Respecto al mercado accionario colombiano, dicho rechazo no es nuevo¹⁷, pero la aproximación basada en el análisis no paramétrico de la dependencia o memoria de largo plazo, si lo es.

Además de rechazar la EMH para el mercado accionario y de renta fija colombianos para las dos metodologías utilizadas, es relevante la magnitud y dirección de la desviación con respecto a dicha hipótesis. En esos dos mercados se comprobó que existe persistencia significativa, lo cual indica que las series de tiempo siguen una caminata aleatoria sesgada (Peters, 1989), por lo que estas siguen una tendencia de largo plazo en una dirección hasta que un evento exógeno sucede y cambia dicho sesgo.

¹⁷ Pérez y Mendoza (2010), basados en pruebas paramétricas y no paramétricas para el efecto día de la semana, rechazan la EMH para el mercado accionario colombiano. De acuerdo con Pérez y Mendoza, la literatura para el caso colombiano coincide en que el mercado accionario es ineficiente.

La existencia de una caminata aleatoria sesgada tiene consecuencias importantes para la formulación de política económica. Indicaría, tal como señala Peters (1989), que la interpretación de los eventos (v.g. noticias, resultados, decisiones, anuncios) por parte de los agentes del mercado no se refleja inmediatamente en el precio, sino que se manifiesta como un sesgo de larga duración en el comportamiento de estos mercados.

En ese sentido, es necesario considerar que en el mercado local pueden existir factores que propician la existencia de persistencia. Dadas las principales características de los mercados locales, entre las posibles alternativas que pudieran explicar la persistencia se encuentran: (i) la iliquidez de los mercados locales, la cual puede favorecer la fragmentación de las operaciones en los sistemas transaccionales (Bouchaud *et al.*, 2008; Lillo y Farmer, 2004); (ii) la regulación incentiva a la imitación por parte de los participantes del mercado, como es el caso de las Administradoras de Fondos de Pensiones (Reveiz *et al.*, 2010a); (iii) la ausencia o escasez de información hace óptima la imitación por parte de los inversionistas (Sornette, 2003); (iv) la existencia y uso de información privilegiada (Menkens, 2007).

b. La dependencia de largo plazo y la valoración de activos

Otra consecuencia directa de la ausencia de independencia de los retornos y de la ineficiencia de los mercados es la invalidez de varios de los pilares teóricos de las Finanzas modernas, tales como el CAPM y la APT para la valoración de activos, el modelo de B&S para la valoración de opciones financieras, y la teoría de portafolios basada en el espacio media-varianza de Markowitz.

El modelo CAPM de Sharpe (1964), el cual señala que el exceso de retorno esperado de equilibrio de un activo individual (j) es una función de su sensibilidad o covarianza (β_j) con el exceso de retorno del portafolio de mercado (m), supone que ambos retornos son independientes ($H_m = H_j = 0,5$), por lo que la estimación del riesgo sistémico por mínimos cuadrados ordinarios es independiente de la frecuencia de la serie de tiempo que se utilice y del plazo de tenencia esperado del inversionista (Greene y Fielitz, 1979).

Esta independencia con respecto a la frecuencia de estimación de la volatilidad se conoce como la consistencia temporal de la volatilidad, según la cual la volatilidad calculada con una serie diaria contiene exactamente la misma información que aquella calculada con una serie mensual, anual, etc., donde el supuesto subyacente es que las series de tiempo siguen una caminata aleatoria (Holton, 1992).

Sin embargo, si los retornos no son independientes ($H_m \neq 0,5 \neq H_j$) y la magnitud de la divergencia con respecto a la independencia no es homogénea ($H_m \neq H_j$), la consistencia temporal desaparece, por lo que el riesgo sistémico se hace función no sólo de la sensibilidad del activo individual al riesgo de mercado (β_j), sino que también se hace función del plazo de la inversión; esto contradice las bases del CAPM, el cual, según Mandelbrot y Hudson (2004) asume que todos los inversionistas comparten el mismo horizonte de inversión. En consecuencia, Greene y Fielitz (1979) señalan que para que el CAPM fuese válido el β_j del activo individual debería estimarse con base en una serie de tiempo cuya frecuencia corresponda con el plazo esperado de tenencia del inversionista.

Por lo anterior, dado que es probable encontrar que el retorno de los activos individuales y del mercado no son independientes ($H_m \neq 0,5 \neq H_j$) y que la divergencia de ambos no es la misma ($H_m \neq H_j$), la forma tradicional de valorar activos o inversiones con base en el modelo CAPM es inválida: una vez se introduce algún grado de alejamiento del supuesto de independencia, el horizonte de inversión se hace relevante, y la determinación de la tasa de descuento para un activo o inversión basada en la estimación del β_j se hace función del tiempo.

Este argumento se suma a las críticas que ha recibido el CAPM, a pesar de lo cual continúa siendo utilizado no sólo como fundamento teórico en la academia, sino como modelo de valoración de alternativas de inversión¹⁸.

c. La dependencia de largo plazo y la optimización de portafolios

La utilización del CAPM no se limita a la valoración de activos. También se utiliza en la comparación de alternativas de inversión, y en la conformación de portafolios de activos.

Tal como se señaló en la sección anterior, la correcta estimación de β_j como medida de sensibilidad al riesgo de mercado recae en el supuesto de independencia del retorno del activo (r_j) y del mercado (r_m). De la misma manera, el comparar el riesgo sistémico de dos o más activos requiere que los retornos estos sean independientes ($H_j=H_k=\dots H_N=0,5$) o que su divergencia con respecto a la independencia sea la misma ($H_j=H_k=\dots=H_N$). De no cumplirse alguna de las mencionadas condiciones, la consistencia temporal de la volatilidad desaparece, y el resultado de la comparación de alternativas de inversión variará con el plazo esperado de tenencia de las mismas.

Lo anterior implica que la utilización convencional de medidas de retorno ajustadas por riesgo para la comparación y selección de activos o portafolios, tales como la razón de Treynor o la razón de Sharpe¹⁹, puede resultar en selecciones sesgadas e ineficientes en ausencia de independencia. Este tipo de medidas, al recaer en la consistencia temporal de la volatilidad, ignora que la ponderación de activos con mayor persistencia tiende a disminuir al aumentar el horizonte de inversión.

Respecto de la volatilidad escalada a plazos largos, como lo es el caso de un año, es importante considerar que es ampliamente utilizada en el proceso de diseño de portafolios de largo plazo o asignación estratégica de activos²⁰. De acuerdo con Holton (1992), en ausencia de la consistencia temporal de la volatilidad (v.g. en ausencia de independencia) la volatilidad de algunos activos puede crecer con el horizonte de tiempo, mientras que la de otros puede decrecer, e inclusive, si la de todos los activos

¹⁸ De una muestra de 392 empresas de los Estados Unidos, Graham y Harvey (2001) obtuvieron que el 73,5% usaba siempre o casi siempre el modelo de CAPM para determinar el costo de capital y tomar decisiones de inversión.

¹⁹ Si r_j es el retorno de un activo o portafolio, r_f es el retorno de un activo libre de riesgo, β_j es la sensibilidad del activo j al riesgo de mercado, y σ_j es la desviación estándar del activo j , la razón de Treynor (T) y la razón de Sharpe (S) se calculan como $T_j = (r_j - r_f)/\beta_j$ y $S_j = (r_j - r_f)/\sigma_j$.

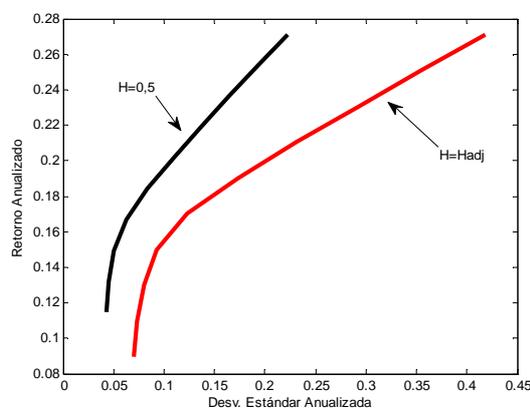
²⁰ Pese a que la asignación estratégica de activos corresponde a la definición de portafolios diseñados para reflejar objetivos de diez o más años (Winkelmann, 2003), usualmente se realizan ejercicios de optimización con base en datos diarios, cuyos resultados son luego escalados a un año.

crece, puede que no lo haga en la misma proporción. Por lo anterior, Holton resalta la importancia de considerar la volatilidad y el plazo de la inversión como primera y segunda dimensión del riesgo de mercado, respectivamente.

Para comprobar la importancia de la presencia de dependencia en los modelos de portafolio basados en el espacio media-varianza se realizó un sencillo ejercicio de optimización²¹. Este ejercicio consistió en la utilización de las series diarias de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500 para la estimación de la matriz de correlación, desviación estándar y la media de los retornos, luego de lo cual estas dos últimas se escalaron o expresaron en términos anuales, para finalmente realizar la optimización. Este tipo de procedimiento es de uso frecuente en la optimización de portafolios; es conveniente ya que sólo a frecuencias diarias o semanales es posible conseguir información suficiente y representativa, pero es a horizontes de inversión más largos (v.g. un semestre, un año) que los inversionistas se interesan en definir un portafolio óptimo.

Para analizar el impacto de la dependencia la volatilidad fue escalada a un año (252 días hábiles) de dos maneras: (i) la tradicional, de acuerdo con la regla de la raíz cuadrada del tiempo ($H=0,5$), y (ii) de acuerdo al *Hadj* (Tabla 9). La matriz de correlación no se modificó²² y la media de los retornos se expresó en términos anuales de manera convencional.

Gráfico 9
*Estimación de fronteras eficientes anualizadas por $H=0,5$ y *Hadj**



Fuente: cálculos de los autores.

Los resultados del Gráfico 9 muestran que la optimización resultante del uso de la regla de la raíz cuadrada del tiempo ($H=0,5$) ofrece mejores combinaciones de riesgo y retorno que aquella basada en la estimación de *Hadj*, por lo cual se puede señalar que la aplicación de dicha regla a la optimización de portafolios para los cuatro factores de

²¹ Se utiliza el espacio media-varianza por ser el más difundido a nivel académico, y por ser la base teórica de la práctica del mercado; a este espacio pertenece no sólo el modelo básico de Markowitz (1952), sino las versiones mejoradas de este, incluyendo al modelo de Black y Litterman (1992). Las falencias derivadas de la utilización de este espacio, así como algunas propuestas metodológicas, pueden ser encontradas en Reveiz y León (2010a).

²² Los autores reconocen que utilizar la misma matriz de correlación para plazos diferentes puede ser inadecuado. Sin embargo, bajo el supuesto de consistencia temporal de la volatilidad, en la práctica se utiliza de esta manera, por lo cual se hace con fines de comparación entre metodologías para escalar la volatilidad.

riesgo escogidos resulta en la subestimación del riesgo y, por ende, en asignaciones ineficientes de activos o factores de riesgo.

En la parte superior de la Tabla 10 se presentan los portafolios que conforman las fronteras eficientes con el supuesto de independencia ($H=0,5$) y con el *Hadj* estimado, donde el primer portafolio corresponde al de mínimo riesgo y el último al de máximo retorno; la parte inferior presenta la ponderación media, máxima y mínima de cada factor de riesgo.

Tabla 10
Ponderación por factor de riesgo de las fronteras eficientes

Port. #	<i>H=0,5</i>					<i>Hadj</i>				
	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500	Retorno/ Riesgo	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500	Retorno/ Riesgo
1	19,6%	0,0%	77,5%	2,9%	2,65	28,0%	0,0%	61,4%	10,7%	1,28
2	11,4%	1,1%	87,3%	0,2%	2,92	20,5%	0,0%	74,5%	4,9%	1,50
3	1,6%	3,9%	94,5%	0,0%	2,97	13,5%	1,6%	84,9%	0,0%	1,61
4	0,0%	16,1%	83,9%	0,0%	2,68	0,7%	3,6%	95,7%	0,0%	1,62
5	0,0%	30,1%	69,9%	0,0%	2,20	0,0%	19,0%	81,0%	0,0%	1,39
6	0,0%	44,1%	55,9%	0,0%	1,85	0,0%	35,2%	64,8%	0,0%	1,10
7	0,0%	58,1%	41,9%	0,0%	1,60	0,0%	51,4%	48,6%	0,0%	0,91
8	0,0%	72,0%	28,0%	0,0%	1,44	0,0%	67,6%	32,4%	0,0%	0,79
9	0,0%	86,0%	14,0%	0,0%	1,31	0,0%	83,8%	16,2%	0,0%	0,71
10	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	1,22	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,65

	<i>H=0,5</i>					<i>Hadj</i>			
	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500		TRM	IGBC	IDXTES	S&P500
Media	3,3%	41,2%	55,3%	0,3%	Media	6,3%	36,2%	55,9%	1,6%
Max.	19,6%	100,0%	94,5%	2,9%	Max.	28,0%	100,0%	95,7%	10,7%
Min.	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	Min.	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Fuente: cálculos de los autores.

Comparativamente se aprecia que bajo el supuesto de independencia ($H=0,5$) el índice S&P500 y la TRM reciben una asignación media y máxima inferior a la que resulta de reconocer que los demás factores de riesgo (IGBC y IDXTES) presentan una mayor persistencia. Consistente con lo anterior, para un nivel de retorno/riesgo similar (≈ 1.6), el séptimo portafolio construido bajo el supuesto de independencia y el tercero construido con el *Hadj* estimado muestran que el primero sobrestima significativamente la participación del IGBC, mientras subestima la de la TRM y del IDXTES.

Los resultados de la Tabla 10 ofrecen una explicación alternativa al alto nivel de sesgo local o *home bias* que exhiben los portafolios de inversión en Colombia (León y Laserna, 2010). Dado que la asignación estratégica de activos recae en modelos de media-varianza, los inversionistas subestiman el riesgo de invertir en el mercado accionario y de renta fija, por lo que la exposición cambiaria y a activos externos es baja. Si la asignación estratégica de activos tuviese en cuenta la persistencia de esos dos mercados, los portafolios óptimos resultantes exigirían una relocalización de recursos en favor de factores de riesgo que tuvieran una menor persistencia, tales como el mercado cambiario y el mercado accionario de los Estados Unidos.

De igual manera, los resultados de la Tabla 10 pueden explicar la tendencia a sobrestimar la participación de activos o portafolios de alto retorno y alto riesgo en los

procesos de optimización de portafolios de largo plazo²³. La utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo desconoce que para la mayoría de los activos financieros la dispersión de los retornos crece más rápidamente que lo que señala el supuesto de independencia (v.g. son persistentes), por lo cual, al aumentar el horizonte de inversión, el retorno esperado tiende a dominar al riesgo. Esta tendencia a que el retorno domine al riesgo en el largo plazo (Rebonato, 2007) puede ser mitigada o corregida en la medida que se reconozca que la dispersión de los retornos varía según el exponente de Hurst, con lo cual la relación retorno-riesgo de los activos de alto retorno y alto riesgo no se dispara rápidamente en relación a los demás activos disponibles.

Lo anterior coincide con lo expuesto en la sección precedente, en la cual se señaló que el CAPM, APT y otras medidas de retorno ajustado por riesgo (v.g. razón de Sharpe y razón de Treynor), al no considerar el alejamiento con respecto al supuesto de independencia, ignoran que la ponderación de activos con mayor persistencia tiende a disminuir al aumentar el horizonte de inversión.

De este modo, en ausencia de independencia, inversionistas diferentes, con horizontes de inversión diferentes, resultan en portafolios eficientes diferentes. En suma, tal como lo resalta Holton (1992), en ausencia de una caminata aleatoria el riesgo se convierte en un factor de dos dimensiones, donde la escogencia del periodo de tenencia de la inversión es tan importante como la selección del activo.

d. La dependencia de largo plazo y la medición del riesgo

Igual que en el caso del CAPM y del modelo de portafolio de Markowitz, la medición del riesgo de mercado basado en el escalamiento de la varianza o la desviación estándar también es cuestionable. Por ejemplo, si se tienen dos activos, A y B, ambos con el mismo retorno esperado y el mismo riesgo (v.g. la misma sensibilidad al riesgo de mercado ($\beta_A = \beta_B$) o la misma desviación estándar ($\sigma_A = \sigma_B$)), pero con niveles de persistencia diferentes ($H_A > H_B > 0,5$), el CAPM y el modelo de portafolio basado en el espacio media-varianza son incapaces de capturar el efecto del plazo de la inversión en la medición del riesgo, por lo que ambos modelos serán indiferentes frente a ambos activos a todos los plazos de inversión.

Al igual que la sensibilidad al riesgo de mercado (β) o la desviación estándar (σ), si la métrica de riesgo es el VaR, esta metodología será incapaz de diferenciar entre los activos A y B. Por ejemplo, si el VaR diario calculado para los activos A y B es igual, y este es escalado a cualquier plazo superior a un día utilizando la regla de la raíz del tiempo, nunca existirá diferencia entre el VaR de ambos activos. No obstante, dado que el proceso que describe el precio del activo A presenta mayor persistencia ($H_A > H_B > 0,5$), es decir, tiende a dispersarse –a ser más riesgoso– al aumentar el plazo, el VaR del activo A debería ser mayor que el de B para cualquier plazo mayor a un día.

²³ Reveiz *et al.* (2010b), al implementar un modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia, encuentran que para maximizar el valor de la riqueza de un trabajador al final de su vida laboral resulta óptimo concentrarse en inversiones de alto riesgo (agresivas). Los mencionados autores reconocen que este resultado no es intuitivo y contradice la hipótesis del ciclo vital, y que este se explica por la dominancia de la tendencia del proceso sobre la dispersión en el largo plazo, según lo presenta Rebonato (2007).

Lo anterior resulta en que la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo en presencia de persistencia subestima el riesgo. En esta afirmación coinciden, entre otros, Schlegel (2009), Los (2005), Kaufmann (2004) y Danielsson y Zigrand (2005)²⁴.

Malevergne y Sornette (2006), Los (2005) y Sornette (2003) señalan que dicha subestimación es común a aquellas medidas de riesgo basadas en la utilización de la distribución de frecuencias (v.g. VaR, VaR-Condiciona, Teoría del Valor Extremo), puesto que, por definición, ignoran la persistencia de los retornos de los activos y se concentran exclusivamente en su frecuencia. Respecto al modelo GARCH básico, el cual es ampliamente aplicado en Finanzas, Malevergne y Sornette (2006) señalan que este modelo tiende a subestimar el riesgo por cuanto subestima la dependencia de largo plazo de la volatilidad de los retornos de los activos.

A continuación, basado en los resultados de la estimación de *Hadj* para los mercados cambiario, accionario y de renta fija colombianos (Tabla 9), se presenta una estimación del error en que se puede incurrir al utilizar la regla de la raíz del tiempo para escalar la desviación estándar o el VaR.

La Tabla 11 presenta el resultado de utilizar diferentes alternativas para escalar la volatilidad diaria de cada una de las series analizadas a volatilidad de diez días. La segunda columna de la parte izquierda presenta la desviación estándar muestral calculada sobre datos diarios; la tercera, la desviación estándar escalada para diez días según la regla de la raíz del tiempo ($H=0,5$); la cuarta presenta la desviación estándar calculada con datos de cada diez días²⁵, y la quinta utiliza el *Hadj* de la Tabla 9. La parte derecha presenta la magnitud porcentual de la subestimación respecto del cálculo con series de periodicidad de cada diez días y del cálculo con series diarias ajustadas por el *Hadj*, donde el signo positivo representa subestimación de la volatilidad²⁶.

Tabla 11
Estimación de la volatilidad escalada a diez días

Serie	Desv. Est. Diaria	Supuesto			Subestimación	
		$H=0,5$	Desv. Est. 10 días*	H ajustado (<i>Hadj</i>)	Desv. Est. 10 días*	H ajustado (<i>Hadj</i>)
TRM	0,0068	0,0215	0,0235	0,0242	9,5%	12,6%
IGBC	0,0144	0,0455	0,0523	0,0592	14,9%	30,1%
IDXTES	0,0033	0,0104	0,0113	0,0134	8,4%	28,5%
S&P 500	0,0140	0,0443	0,0365	0,0425	-17,6%	-4,0%

(*) La desviación estándar de 10 días se calculó con un total de 261 datos.

Fuente: cálculos de los autores

Se aprecia que para los factores de riesgo del mercado colombiano el supuesto de independencia resulta en una notable subestimación del riesgo, ya sea cuando se

²⁴ Otros autores (Dowd *et al.*, 2001; Diebold *et al.*, 1997), bajo el supuesto que los retornos diarios siguen un proceso GARCH (1,1), señalan que en el largo plazo la volatilidad tiende a decaer gradualmente, por lo que puede existir en algunos casos sobrestimación del VaR al escalar la volatilidad por una constante.

²⁵ En ausencia de la consistencia temporal de la volatilidad, el cálculo de la desviación estándar con base en datos de cada diez días debería ser la utilizada para calcular la volatilidad para diez días. Sin embargo, dado que hacerlo resulta en series de tiempo de extensión limitada –en este caso se dispuso de 261 datos–, esto resulta en estimaciones poco fiables. Se presenta con propósitos de comparación.

²⁶ Calculada por Menkens (2007) como $[(n^{Hadj} - n^{0,5}) / (n^{0,5})]$.

compara con la desviación estándar calculada con una serie de diez días, o con aquella que utilizó *Hadj* como factor de escalamiento.

Estos niveles de subestimación son relevantes para el caso colombiano. Como se mencionó anteriormente, de acuerdo con los antiguos estándares técnicos establecidos por el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria en 1995 (BIS, 1995), los cuales son –aún- la base de la reglamentación vigente de la Superintendencia Financiera de Colombia, el VaR debe ser calculado para un periodo mínimo de tenencia de diez días, para lo cual se puede estimar el VaR para periodos más cortos, pero escalándolos a diez días, lo que se consigue al multiplicarlo por la raíz cuadrada del tiempo. En contraposición, la más reciente revisión de estos estándares (BIS, 2009) exige la justificación periódica de la razonabilidad técnica de esta regla.

Como es de esperar, la magnitud del error se incrementa con el tiempo. La Tabla 12 presenta la estimación de la volatilidad escalada para 252 días para las diferentes alternativas, así como la magnitud de la subestimación.

Tabla 12
Estimación de la volatilidad escalada a 252 días

Serie	Desv. Est. Diaria	Supuesto			Subestimación	
		<i>H</i> =0,5	Desv. Est. 252 días*	H ajustado (<i>Hadj</i>)	Desv. Est. 252 días*	H ajustado (<i>Hadj</i>)
TRM	0,0068	0,1079	0,1350	0,1435	25,1%	32,9%
IGBC	0,0144	0,2286	0,3490	0,4301	52,7%	88,2%
IDXTES	0,0033	0,0524	0,1031	0,0957	96,7%	82,7%
S&P 500	0,0140	0,2222	0,2450	0,2013	10,2%	-9,4%

(*) La desviación estándar de 252 días se calculó con un total de 10 datos.

Fuente: cálculos de los autores.

Al igual que en el caso de la volatilidad escalada a diez días, la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo para escalar la volatilidad a 252 días resulta en una notable subestimación de la desviación estándar o el VaR con respecto a las demás alternativas²⁷.

En respuesta a la subestimación del riesgo por la utilización de la mencionada regla, algunos autores, basados en diversas metodologías para la estimación de la dependencia de corto y largo plazo, han propuesto ajustes o alternativas a la regla de la raíz cuadrada del tiempo. Por ejemplo, Embrechts *et al.* (2009), Schlegel (2009) y Kaufmann (2004) proponen un sencillo ajuste basado en la autocorrelación de la serie de los retornos del activo para reconocer la dependencia de corto plazo, mientras que Menkens (2007) y Los (2005) proponen la utilización del exponente de Hurst para escalar el VaR.

Por último, la subestimación del riesgo que resulta de la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo afecta al principal modelo de valoración de opciones: el modelo de B&S (1973). Al utilizar dicha regla para escalar la desviación estándar estimada (σ) al

²⁷ En ausencia de la consistencia temporal de la volatilidad, el cálculo de la desviación estándar con base en datos de cada 252 días debería ser la utilizada para calcular la volatilidad para 252 días. Sin embargo, dado que hacerlo resulta en series de tiempo de extensión limitada –en este caso se dispuso de 10 datos-, esto resulta en estimaciones poco fiables. Se presenta con propósitos de comparación. .

plazo al vencimiento de la opción (T) en presencia de persistencia, el modelo de B&S subestima la probabilidad de ocurrencia de escenarios que se alejan de la tendencia de retorno del activo. Esto conlleva, a su vez, a la principal crítica a dicho modelo: la subestimación del valor de las opciones, especialmente para *deep-out-of-the-money-calls* ($K \gg S_t$) y *deep-out-of-the-money-puts* ($K \ll S_t$).

Lo anterior es evidente si se considera que la fórmula del modelo de B&S [F11] se fundamenta en que el precio de una opción resulta de la diferencia entre el valor esperado del activo subyacente y el costo esperado de la opción. La expresión “esperado” corresponde al uso de probabilidades de ocurrencia, las cuales consisten en el cálculo de la distancia [F12] entre el precio spot y el precio de ejercicio ($\ln(S_t/K)$), ajustada por la tendencia del proceso que sigue el activo durante la vida de la opción ($(r + \sigma^2/2)T$), que es convenientemente estandarizada por la desviación estándar escalada al plazo de la opción ($\sigma\sqrt{T}$), con lo que, utilizando la distribución normal acumulada (N), se obtiene la probabilidad acumulada de ocurrencia de escenarios en los que la opción sería ejercida bajo los supuestos de normalidad e independencia de los retornos del subyacente.

$$C_{BS} = S_t N(d_1) - K e^{-rt} (d_2) \quad [F11]$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad [F12]$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Dado que la estandarización de la distancia ajustada entre el precio spot (S) y el precio de ejercicio (K) recae en la regla de la raíz cuadrada del tiempo ($\sigma\sqrt{T}$), la presencia de persistencia en el retorno del activo subyacente supondría que la probabilidad acumulada de ocurrencia de escenarios en los que la opción sería ejercida está siendo subestimada. Entonces, de este modo, el supuesto de normalidad e independencia de los retornos del subyacente resulta en la subvaloración de la opción.

6. Consideraciones finales

Los resultados encontrados en este documento demuestran la presencia de dependencia o memoria de largo plazo en el mercado accionario y de renta fija colombianos, la cual, por su magnitud y dirección, indica que los retornos de ambos mercados se caracterizan por una persistencia significativa. En el caso del mercado cambiario también existe evidencia de persistencia, aunque esta no es significativa de acuerdo con las dos metodologías utilizadas.

Este documento corroboró los hallazgos de varios autores sobre la robustez de la metodología R/S ante cambios marginales en la distribución de las variables, e

implementó varias alternativas de hipótesis nula de independencia. Con esto no sólo se comprobó la utilidad y robustez de la metodología, sino que se detectó la presencia de persistencia significativa para los mercados accionarios y de renta fija local, la cual fue verificada por la metodología *mR/S*.

Este documento también se ocupó de cuantificar el sesgo derivado de la utilización de series finitas para la estimación de H , lo que finalmente resultó en el exponente de Hurst ajustado (*Hadj*). El cálculo de este exponente ajustado permite discriminar entre el rechazo de la hipótesis nula de independencia de largo plazo debido al uso de series finitas y la genuina presencia de memoria de largo plazo. Adicionalmente, contar con el exponente ajustado permitió utilizar las estimaciones con el fin de evaluar cuantitativamente el impacto de la utilización de la regla de la raíz cuadrada del tiempo en presencia de dependencia de largo plazo.

Se demostró que el impacto de la utilización de dicha regla para escalar la desviación estándar o el VaR es considerable para los principales factores de riesgo del mercado colombiano, inclusive a plazos relativamente cortos (v.g. diez días). En concordancia con otros autores, se encontró que la utilización de esta regla en presencia de persistencia resulta en la subestimación del riesgo.

También se demostró que en ausencia de independencia el plazo de inversión se hace relevante, por lo que prácticas tradicionales como escalar el resultado de la optimización basada en media-varianza no está exento de inconvenientes. Esto es de gran importancia para ejercicios de optimización cuyo horizonte de inversión es significativamente superior a la frecuencia de las observaciones utilizadas para estimar los momentos de la distribución, como es el caso de los Administradores de Fondos de Pensiones.

Del mismo modo, medidas tradicionales de riesgo (v.g. el β de una acción o la desviación estándar), medidas tradicionales de retorno ajustado por riesgo (v.g. la razón de Sharpe), y el modelo de B&S para la valoración de opciones, también deben ser utilizados con reservas. Lo anterior resalta la importancia de medidas de riesgo y procedimientos de optimización y valoración que capturen cambios extremos y cambios persistentes en los precios²⁸.

Los hallazgos de este documento son importantes en la práctica en la medida que demuestran la inconveniencia de utilizar la regla de la raíz cuadrada del tiempo. En ese sentido, igual que lo hizo el Comité de Basilea en la última revisión a los estándares cuantitativos para la estimación del riesgo de mercado (BIS, 2009), la reglamentación y la práctica debe evolucionar hacia medidas de riesgo más ajustadas a la realidad del comportamiento de los activos, donde la utilización del supuesto de caminata aleatoria recaiga en un sustento técnico adecuado.

En la práctica, para no recaer equivocadamente en el supuesto de caminata aleatoria se tienen dos alternativas. La primera, consistente en utilizar series de tiempo cuya periodicidad coincida con el horizonte de inversión del ejercicio, pese a ser la más directa y deseable, por lo general se enfrenta a limitaciones en cuanto a la disponibilidad

²⁸ Una alternativa metodológica en ese sentido es la propuesta por Reveiz y León (2010a).

y relevancia de la información. La segunda, fundamentada en la medición de la persistencia de la serie de tiempo, permite utilizar series de tiempo reducidas y cuya relevancia es determinante, aunque introduce el riesgo de escoger un modelo adecuado para realizar tal medición. De acuerdo con lo anterior, de no ser posible obtener series de extensión suficiente, o si la utilización de información de cierta antigüedad vicia los resultados, medir la persistencia y ajustar los resultados de acuerdo con dicha medición es esencial para no reincidir en el supuesto de independencia de los retornos de los activos.

En cuanto a la teoría, los resultados corroboran la ausencia de una caminata aleatoria en el proceso que describen los activos financieros del mercado local, lo cual, a su vez, invalida la EMH. Lo anterior se suma a las conclusiones de otros autores (ver Pérez y Mendoza, 2010), quienes encuentran que el mercado accionario local no se puede caracterizar como eficiente en el sentido débil.

Adicionalmente, que el mercado accionario y de renta fija colombianos no puedan ser caracterizados como eficientes por la presencia de persistencia resulta en la posibilidad de que estos factores sigan una caminata aleatoria sesgada (Peters, 1996), según la cual los precios no reflejan de manera inmediata la información disponible en el mercado.

Respecto a las metodologías escogidas, pese a ser las más conocidas, utilizadas y documentadas, no son las únicas. Además del R/S de Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b) y el mR/S de Lo (1991), existen otras variantes y alternativas para estimar la dependencia de largo plazo (v.g. *Detrended Fluctuation Analysis*, *Wavelets* y regresión basada en periodogramas), algunas de las cuales se describen en Clark (2005) y Cannon *et al.* (1997).

La escogencia de las metodologías implementadas obedeció a su parsimonia, a su documentada complementariedad, robustez y utilidad para detectar la dependencia de largo plazo, así como a la conveniencia de tener un acervo de literatura y resultados que permitieran realizar un análisis adecuado de las metodologías y sus alcances. Por lo anterior, los resultados, no obstante corresponden a la aplicación de metodologías documentadas como robustas, y pese a ser significativos de acuerdo con las pruebas realizadas, corresponden a una primera aproximación a la detección de la dependencia de largo plazo para el mercado colombiano, susceptibles de ser corroborados a través de la utilización de otras metodologías.

7. Referencias²⁹

- Alptekin, N., “Rescaled Range Analysis of Turkish Gold Returns”, *International Journal of Economic Perspectives*, Vol.2, No.4, 2008.
- Ambrose, B.W.; Weinstock, E.; Griffiths, M.D., “Fractal Structure in the Capital Markets Revisited”, *Financial Analysts Journal*, No.49, Vol.3, 1993.
- Andrews, D., “Heteroskedacity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation”, *Econometrica*, No.59, 1991.
- Anis, A.A. y Lloyd, E.H., “The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands”, *Biometrika*, No.1, Vol.63, 1976.
- Bachelier, L., “Théorie de la Spéculation”, *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, Tercera Serie, Vol.17, 1900.
- Batten, J.; Ellis, C.; Mellor, R., “Scaling Laws in Variance as a Measure of Long-Term Dependence”, *International Review of Financial Analysis*, No.8, Vol.2, 1999.
- Bilel, T. y Nadhem, M., “Long Memory in Stock Returns: Evidence of G7 Stocks Markets”, *Research Journal of International Studies*, No.9, 2009.
- BIS, “Planned Supplement to the Capital Accord to Incorporate Market Risks”, Basle Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements, 1995.
- BIS, “Revisions to the Basel II Market Risk Framework”, Basle Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements, 2009.
- Black, F. y Litterman, R., “Global Portfolio Optimization”, *Financial Analysts Journal*, 1992.
- Black, F. y Scholes, M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, Vol.81, No.3, 1973.
- Bouchaud, J-P.; Farmer, J.D.; Lillo, F., “How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand”, [documento en línea], 2008, consultado el 3 de febrero de 2010, en <<http://ssrn.com/abstract=1266681>>.
- Brock, W.A. y de Lima, P.J.F., “Non Linear Time Series, Complexity Theory and Finance”, *Handbook of Statistics* (Eds. Maddala, G.S. y Rao, C.R.), Elsevier Science Pub, 1993.
- Brown, R., “A Brief Account of Microscopical Observations – On the Particles Contained in the Pollen of Plants and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies”, 1828.
- Brown, R., “Additional Remarks on Active Molecules”, 1829.
- Cajueiro, D.O. y Tabak, B.M., “Testing for Long-Range Dependence in World Stock Markets”, *Chaos, Solitons and Fractals*, No.37, 2008.
- Campbell, J.Y.; Lo A.W.; MacKinlay, A.C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.
- Cannon, M.J.; Percival, D.B.; Caccia, D.C.; Raymond, G.M.; Bassingthwaite, J.B., “Evaluating Scaled Windowed Variance Methods for Estimating the Hurst Coefficient of Time Series”, *Physica A*, No.241, 1997.

²⁹ Algunos documentos tienen versiones preliminares publicadas en Borradores de Economía, por lo que se encuentran disponibles en http://www.banrep.gov.co/publicaciones/pub_borra.htm. Estos documentos se identifican con un asterisco (*).

- Clark, A., "The Use of Hurst and Effective Return in Investing", *Quantitative Finance*, Vol.5, No.1, 2005.
- Corazza, M.; Malliaris, A.G.; Nardelli, C., "Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Markets", *The Journal of Futures Markets*, Vol.17, No.4, 1997.
- Couillard, M. y Davison, M., "A Comment on Measuring the Hurst Exponent of Financial Time Series", *Physica A*, No.348, 2005.
- Cowles, A. y Jones, Herbert, "Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action", *Econometrica*, No.3, 1937.
- Da Silva, S.; Matsushita, R.; Gleria, I.; Figueiredo, A., "Hurst Exponents, Power Laws, and Efficiency in the Brazilian Foreign Exchange Market", *Economics Bulletin*, Vol.7, No.1, 2007.
- Daniélsson, J. y Zigrand, J-P., "On Time-Scaling of Risk and the Square-Root-of-Time Rule", Department of Accounting and Finance and Financial Markets Group, London School of Economics, 2005.
- Diebold, F.X.; Hickman, A.; Inoue, A.; Schuermann, T., "Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by \sqrt{h} Is Worse than You Think", Working Paper, No.97-34, The Wharton Financial Institutions Center, University of Pennsylvania, 1997.
- Dowd, K.; Blake, D.; Cairns, A., "Long-term Value at Risk", Discussion paper pi-0006, The Pensions Institute, 2001.
- Einstein, A., "On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic theory of Heat", *Annalen der Physik*, 1905.
- Ellis, C., "The Sampling Properties of Hurst Exponent Estimates", *Physica A*, No.375, 2007.
- Embrechts, P.; Furrer, H; Kaufmann, R., "Different Kinds of Risk", *Handbook of Financial Time Series* (Eds. Andersen, T.; Davis, R.A.; Kreiß, J-P.; Mikosch, T.), Springer, 2007.
- Erzgräber, H.; Strozzi, F.; Zaldivar, J-M.; Touchette, H.; Gutiérrez, E.; Arrowsmith, D.K., "Time Series Analysis and Long-Range Correlations of Nordic Spot Electricity Market Data", *Physica A*, Vol.387, No.15, 2008.
- Graham, J.R y Harvey, C.R, "The Theory and Practice of Corporate Finance: Evidence from the field", *Journal of Financial Economics*, No.61, 2001.
- Granger, C.W., "The Typical Spectral Shape of an Economic Variable", *Econometrica*, No.1, Vol.34, 1966.
- Greene, M.T. y Fielitz, B.D., "Long-Term Dependence in Common Stocks", *Journal of Financial Economics*, No.4, 1977.
- Greene, M.T. y Fielitz, B.D., "The Effect of Long-Term Dependence on Risk-Return Models of Common Stocks", *Operations Research*, Vol.27, No.5, 1979.
- Holton, G.A., "Time: the Second Dimension of Risk", *Financial Analysts Journal*, No.48, Vol.6, 1992.
- Hull, J.C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2003.
- Hurst, H.E., "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, No.116, 1951.

- Hurst, H.E., "The Problem of Long-Term Storage in Reservoirs", *Bulletin d'Information de l'Association Internationale d'Hydrologie Scientifique*, No.3, 1956.
- Jagic, T.; Podobnik, B.; Kolanovic, M., "Does the Efficient Market Hypothesis Hold? Evidence from Six Transition Economies", *Eastern European Economics*, Vol.43, No.4, 2005.
- Jegadeesh, N. "Evidence of Predictable Behavior of Security Returns", *The Journal of Finance*, Vol.45, No.3, 1990.
- Jegadeesh, N. "Seasonality in Stock Price Mean Reversion: Evidence from the U.S. and the U.K", *The Journal of Finance*, Vol.46, No.4, 1991.
- Kaufmann, R., "Long-Term Risk Management", Diss. ETH No.15595, Swiss Federal Institute of Technology, 2004.
- LeBaron, B. y Yamamoto, R., "Long-Memory in an Order-Driven Market", *Physica A*, No.383, 2007.
- León, C. y Laserna, J.M., "Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo", *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública* (Eds. Laserna, J.M. y Gómez, M.C.), Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2010.*
- León, C., "Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos", *Borradores de Economía*, No. 570, Banco de la República, 2009.*
- Lillo, F. y Farmer, J.D., "The Long Memory of the Efficient Market", *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, No.3, Vol.8, 2004.
- Lo, A.W., "Long-Term Memory in Stock Market Prices", *Econometrica*, Vol. 59, No.5, 1991.
- Los, C.A., "Why VAR Fails: Long Memory and Extreme Events in Financial Markets", *The ICAFI Journal of Financial Economics*, Vol.3, No.3, 2005.
- Los, C.A., *Financial Market Risk*, Routledge, 2003.
- Malevergne, Y. y Sornette, D., *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer-Verlag, 2006.
- Mandelbrot B. y Hudson R.L., *The (Mis)Behavior of Markets*, Basic Books, 2004.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J., "Global Dependence in Geophysical Records", *Water Resources Research*, No.5, 1969b.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J., "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long-Run Statistical Dependence", *Water Resources Research*, No.5, 1969a.
- Mandelbrot, B., "Une Classe de Processus Stochastiques Homothétiques à Soi. Application à la Loi Climatologique de H. E. Hurst", *Comptes Rendus Academie de Science de Paris*, Vol.260, 1965.
- Mandelbrot, B., "Heavy Tails in Finance for Independent or Multifractal Price Increments", *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (Ed. Rachev, S.T.), North Holland, 2003.
- Mandelbrot, B., "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: from the Covariance to the R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement*, NBER, Vol.1, No.3, 1972.

- Mandelbrot, B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *The Journal of Business*, Vol.36, No.4, 1963.
- Markowitz, H.M., "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1, 1952.
- Martin, B.; Rachev, S.T.; Schwartz, E.S., "Stable non-Gaussian Models for Credit Risk Management", *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (Ed. Rachev, S.T.), North Holland, 2003.
- McKenzie, D., "Non-periodic Australian Stock Market Cycles: Evidence from Rescaled Range Analysis", *The Economic Record*, No.239, Vol.77, 2001.
- McLeod, A.I. y Hipel, K.W., "Preservation of the Rescales Adjusted Range. A Reassessment of the Hurst Phenomenon", *Water Resources Research*, Vol.14, No.3, 1978.
- Menkens, O., "Value at Risk and Self-Similarity", *Numerical Methods for Finance* (Eds. Miller, J.; Edelman, D.; Appleby, J.), Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2007.
- Mills, F.C., *The Behavior of Prices*, NBER, 1927.
- Mina, J. y Xiao, J., "Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard", RiskMetrics, 2001.
- Mitchell, W.C., "Business Cycles: the Problem and its Setting", *NBER Studies in Business Cycles*, No.1, NBER, 1927.
- Nawrocki, D., "R/S Analysis and Long-Term Dependence in Stock Market Indices", *Managerial Finance*, No.21, Vol.7, 1995.
- Palomas, E. "Evidencia e Implicaciones del Fenómeno Hurst en el Mercado de Capitales", *Gaceta de Economía*, ITAM, Año 8, No.15, 2002.
- Pérez, J. y Mendoza, J.C., "Efecto Día en el Mercado Accionario Colombiano: Una Aproximación No Paramétrica", *Borradores de Economía*, No.585, Banco de la República, 2010.
- Peters, E.E., "Fractal Structure in the Capital Markets", *Financial Analysts Journal*, No.45, Vol.4, 1989.
- Peters, E.E., "R/S Analysis using Logarithmic Returns", *Financial Analysts Journal*, No.48, Vol.6, 1992.
- Peters, E.E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley & Sons, 1996.
- Peters, E.E., *Fractal Market Analysis*, John Wiley & Sons, 1994.
- Qian, B. y Rasheed, K., "Hurst Exponent and Financial Market Predictability", *IASTED conference on Financial Engineering and Applications (FEA 2004)*, 2004.
- Rebonato, R., *Plight of the Fortune Tellers*, Princeton University Press, 2007.
- Reveiz, A. y León, C. "Índice Representativo del Mercado de Deuda Pública Interna: IDXTES", *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública* (Eds. Laserna, J.M. y Gómez, M.C.), Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2010b.^{30*}
- Reveiz, A. y León, C., "Efficient Portfolio Optimization in the Wealth Creation and Maximum Drawdown Space", *Interest Rate Models, Asset allocation and Quantitative Techniques for Central Banks and Sovereign Wealth Funds* (Eds. Berkelaar, B., Coche, J. y Nyholm, K.), Palgrave Macmillan, 2010a.*

³⁰ La serie histórica del IDXTES está disponible en: http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/IDXTES_web.xls.

- Reveiz, A.; León, C.; Castro, F.; Piraquive, G., “Modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia”, *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública* (Eds. Laserna, J.M. y Gómez, M.C.), Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2010b.*
- Reveiz, A.; León, C.; Laserna, J.M.; Martínez, I., “Recomendaciones para la Modificación del Régimen de Pensiones Obligatorias de Colombia”, *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública* (Eds. Laserna, J.M. y Gómez, M.C.), Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2010a.*
- Schlegel, C., “From Confident Ignorance to Thoughtful Uncertainty: Risk Management after Lehman”, *Energy Risk*, noviembre, 2009.
- Sharpe, W.F. “Capital Asset Prices: A Theory of Equilibrium under Conditions of Risk”, *The Journal of Finance*, Vol.19, No.3, 1964.
- Sierra, G., “Procesos de Hurst y Movimientos Brownianos Fraccionales en Mercados Fractales”, *Revista de Administración, Finanzas y Economía*, EGADE, Vol.1, No.1, 2007.
- Singh, J.P. y Dey, P., “Risk Measurement, Nonlinearities and Chaos”, *Singapore Management Review*, No.24, Vol.2, 2002.
- Sornette, D., *Why Stock Markets Crash*, New Jersey, Princeton University Press, 2003.
- Souza, S.; Tabak, B.; Cajueiro, D., “Long-Range Dependence in Exchange Rates: The Case of the European Monetary System”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.11, No. 2, 2008.
- Sun, W.; Rachev, S.; Fabozzi, F.J. “Fractals or IID: Evidence of Long-Range Dependence and Heavy Tailedness from Modeling German Equity Market Returns”, *Journal of Economics & Business*, Vol.59, No.6, 2007.
- Sutcliffe, J.V., “Obituary – H.E. Hurst”, *Hydrological Sciences Bulletin*, No.24, Vol.4, 1979.
- Teverovsky, V.; Taqqu, M.; Willinger, W., “A Critical Look at Lo’s Modified R/S Statistic”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, No.80, 1999.
- Wallis, J.R. y Matalas, N.C., “Small Sample Properties of H and K estimators of the Hurst Coefficient H”, *Water Resources Research*, No.6, Vol.6, 1970.
- Weron R. y Przybyłowicz B., “Hurst Analysis of Electricity Price Dynamics”, *Physica A*, No.3, Vol. 283, 2000.
- Willinger, W.; Taqqu, M.; Teverovsky, V., “Stock Market Prices and Long-Range Dependence”, *Finance and Stochastics*, No.3, 1999.
- Winkelmann, K., “Issues in Strategic Asset Allocation”, *Modern Investment Management* (Ed. Litterman, B.), John Wiley & Sons, 2003.
- Working, H., “Cycles in Wheat Prices”, *Wheat Studies of the Food Research Institute*, 1931.

8. Anexo 1

Con base en Clark (2005), Peters (1994, 1992 y 1989), Nawrocki (1995), Lo (1991) y Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b), el cálculo del exponente de Hurst y el estadístico Vq se describe a continuación.

Exponente de Hurst

Para una serie de tiempo de N retornos se tiene un número k de segmentos independientes (que no se sobreponen³¹) de tamaño n en los cuales se debe dividir la serie original de forma que $n \times k = N$.

Para este valor k , se debe calcular el rango reescalado $(R/S)_n$ [3 y 4], así:

- A. Calcular la media aritmética (μ) de cada uno de los segmentos k de tamaño n en que ha sido dividida la serie, donde $i=1,2,3\dots n$ y $x_{i,k}$ corresponde al retorno i del segmento k .

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k}$$

- B. Obtener las diferencias de cada retorno i con respecto a la media para cada segmento k .

$$Y_{i,k} = x_{i,k} - \mu_k$$

- C. Calcular la serie de diferencias acumuladas para cada segmento k .

$$D_{i,k} = \sum_{i=1}^n Y_{i,k}$$

- D. Determinar el rango ($R_{n,k}$) de la serie $D_{i,k}$.

$$R_{n,k} = \max(D_{1,k}, \dots, D_{i,k}, \dots, D_{n,k}) - \min(D_{1,k}, \dots, D_{i,k}, \dots, D_{n,k})$$

³¹ Nawrocki (1995) señala que la utilización de segmentos contiguos o muestras independientes (que no se sobreponen) reduce la posibilidad de que exista correlación entre estos y agrega robustez a la estimación. Sin embargo, algunos autores utilizan segmentos que se sobreponen, con lo cual logran maximizar el número de observaciones en series de tamaño reducido. Ellis (2007) concluye que no existe un impacto significativo en el valor estimado de H entre el uso de segmentos contiguos o que se sobreponen, pero sí en la desviación estándar de este si la serie de tiempo es relativamente corta; en tal caso Ellis aconseja utilizar segmentos que se sobreponen.

E. Calcular la desviación estándar muestral para cada segmento k .

$$S_{n,k} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{i,k} - \mu_k)^2}$$

F. Calcular el rango reescalado para cada segmento k .

$$(R/S)_{n,k} = R_{n,k} / S_{n,k}$$

G. Calcular el rango reescalado promedio para k segmentos de tamaño n .

$$(R/S)_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (R/S)_{n,k}$$

Este rango $(R/S)_n$ corresponde a la distancia estandarizada promedio que recorre el sistema por unidad de tiempo n .

El anterior procedimiento debe realizarse para diversos valores de k , donde $k_j = n_{min} \dots n_{max}$, y donde n_{min} y n_{max} corresponden al tamaño mínimo y máximo de la ventana de datos escogidos para realizar el cálculo del rango reescalado, respectivamente. De este modo se cuenta con j valores de $(R/S)_n$, donde $n_j = \frac{N}{k_j}$.

Finalmente, con los diferentes valores de n y $(R/S)_n$ se realiza la regresión de mínimos cuadrados propuesta por Mandelbrot y Wallis (1969a y 1969b), donde H corresponde al exponente de Hurst estimado:

$$\text{Log}(R/S)_n = \text{Log}(c) + H \text{Log}(n)$$

Estadístico Vq

A diferencia de la estimación de H , el estadístico Vq de Lo (1991) no resulta de la regresión sobre una serie de ventanas de datos, sino del cálculo del rango reescalado sobre la muestra total de tamaño N , el cual resulta en $(R/Q)_N$, donde Q_N corresponde a la raíz cuadrada de la varianza de las sumas parciales hasta el rezago q , donde el orden de los rezagos busca excluir la incidencia de procesos de memoria de corto plazo en la estimación de la dependencia de largo plazo. Si σ es la desviación estándar muestral estimada, γ es la autocovarianza estimada y $\omega_p(q)$ es la ponderación asignada a la autocovarianza con rezago p , Q_N y ω_p se calculan de la siguiente manera:

$$Q_N = \sqrt{\sigma^2 + 2 \sum_{p=1}^q \omega_p(q) \gamma}$$

$$\omega_p = 1 - \left| \frac{p}{q} \right|$$

Finalmente, Lo (1991) calcula el parámetro V_N , el cual utiliza para probar la hipótesis nula de independencia.

$$V_N = N^{-0,5}(R/Q)_N$$

9. Anexo 2

Los resultados de H y $Hadj$ para ventanas mínimas de 10, 16, 32 y 64 datos se presentan a continuación.

Tabla 13
Valores estimados de H para diferentes tamaños de ventana mínima

	10		16		32		64	
	H estimado	Desv. Est.						
TRM	0,6357	0,0033	0,6286	0,0044	0,6343	0,0066	0,6396	0,0161
IGBC	0,6790	0,0034	0,6800	0,0040	0,6971	0,0070	0,7245	0,0153
IDXTES	0,6667	0,0037	0,6737	0,0048	0,6918	0,0079	0,6842	0,0155
S&P 500	0,5672	0,0038	0,5664	0,0052	0,5649	0,0086	0,5384	0,0186

Fuente: cálculos de los autores.

Tabla 14
Valores estimados de Hadj para diferentes tamaños de ventana mínima

	10	16	32	64
TRM	0,5529	0,5458	0,5515	0,5568
IGBC	0,5962	0,5972	0,6143	0,7245
IDXTES	0,5839	0,5909	0,6090	0,6842
S&P 500	0,4844	0,4836	0,4821	0,5384

Fuente: cálculos de los autores.