BANCO DE LA REPÚBLICA
SUBGERENCIA DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

¿ESTÁ DETERMINADO EL NIVEL DE PRECIOS POR LAS EXPECTATIVAS DE DINERO Y PRODUCTO EN COLOMBIA?[*]

Martha Misas A.
Carlos Esteban Posada P.
Diego Mauricio Vásquez E.

Octubre 2001

[*]Los autores son funcionarios del Banco de la República, pero el contenido de este documento es de su responsabilidad exclusiva y, por tanto, no compromete a la institución ni a sus directivas. Se agradecen los comentarios y sugerencias de Luis Eduardo Arango, Ana María Iregui, Luis Fernando Melo, Fabio Nieto, Hugo Oliveros, María Tersa Ramírez y Hernando Vargas.

I. Introducción

La corriente tradicional de investigación teórica y empírica conocida como la “teoría cuantitativa del dinero” ha sostenido que la cantidad de éste es el principal factor determinante del nivel de precios.

Pero no siempre ha habido un consenso al respecto. Por ejemplo, hay quienes interpretan la ejecución de la estrategia denominada “inflation targeting” (*IT*), utilizada en la actualidad por muchos bancos centrales para alcanzar una meta de inflación, entre ellos el colombiano, como síntoma de una supuesta irrelevancia de la cantidad de dinero para la determinación del nivel de precios o de su tasa de aumento, la inflación[1].

Es más, entre los funcionarios encargados de la política monetaria de Estados Unidos[2] habría una tendencia inclinada a rechazar las enseñanzas de la teoría cuantitativa, a juzgar por la siguiente afirmación:

> *“A consensus has emerged among practitioners that the instrument of monetary policy ought to be the short-term interest rate, that policy should be focused on the control of inflation, and that inflation can be reduced by increasing short-term interest rates. At the center of this consensus is a rejection of the quantity theory. ...”* (Alvarez *et al.* [2001]).

Aunque no creemos que exista necesariamente incompatibilidad entre la teoría cuantitativa y la estrategia *IT* o los modelos más utilizados para explicar y defender tal estrategia, si es indudable que tanto su diseño como su ejecución y divulgación en la opinión pública pueden tener diversas interpretaciones, siendo algunas contrarias a dicha teoría[3].

A nuestro jucio, el hecho de que la estrategia *IT* sea percibida, en ocasiones, como “anti-cuantitativista” es una de las razones para volver a poner a prueba la hipótesis cuantitativa según la cual la cantidad de dinero y el ingreso real son determinantes fundamentales del nivel de precios.

El objetivo del presente trabajo es someter a prueba tal hipótesis para el caso colombiano pero en el siguiente sentido específico: lo que determina el nivel de precios es el

---

[1] Sobre la estrategia de *IT* véase Svensson (1998 y 1999), y sobre su aplicación al caso colombiano véanse Uribe *et al.* (1999) y Caballero [2001]).

[2] La política monetaria de Estados Unidos no se inscribe formalmente en una estrategia de *IT* pero sigue un procedimiento que es común a esta: fijar la tasa de interés de intervención en función de algunos objetivos, entre estos una meta de inflación (que allí es implícita). Una descripción y evaluación de la política monetaria actual de Estados Unidos a la luz de la experiencia histórica se encuentra en Meltzer (2001).

[3] En un documento reciente, uno de los codirectores del Banco de la República consideró conveniente aclarar que la estrategia colombiana de *IT* tenía como complemento el establecimiento de una línea de referencia de un agregado monetario (la base monetaria), y que la naturaleza de la inflación es monetaria en el mediano y el largo plazo (Caballero [2001, p. 7]).

juicio de los agentes económicos sobre la magnitud y la evolución de los componentes permanentes del dinero nominal y del producto real, entendidos éstos como los valores actuales esperados de sus trayectorias futuras, y que los factores juzgados como transitorios carecen de importancia para la determinación de dicho nivel.

La verificación de tal hipótesis se realiza mediante un procedimiento de optimización no lineal, que considera la aplicación del filtro de Kalman y la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros de una representación estado-espacio. Dicha representación se deriva de un modelo macroeconómico de equilibrio general intertemporal con expectativas racionales. Este trabajo se lleva a cabo con datos anuales para el período 1954-2000.

Las aplicaciones del filtro de Kalman en el análisis macroeconómico se han realizado desde los años setenta (Sargent 1987, p. 228). Algunos estudios recientes, como los de Söderlind (2001 y 1999), Cabos y Siegfried (2001) y Fung *et al.* (1999) pueden considerarse antecesores del nuestro en el sentido de que son macroeconómicos que aplican el filtro de Kalman para estimar parámetros, variables no observadas, entre éstas las expectativas de inflación o la "inflación simulada", o componentes no observados de series observadas. Pero hasta el momento (principios de octubre de 2001) no conocemos trabajos cuyo objetivo y método (aún si fueren propuestos para otra economía) sean iguales a los del presente. Nuestro aporte, si realmente existe, consistiría en el hecho de aplicar el método mencionado al objetivo de poner a prueba la hipótesis de determinación del nivel observado de precios por las trayectorias futuras esperadas del dinero y del producto.

El principal hallazgo consiste en no encontrar evidencia empírica para rechazar la hipótesis de relevancia estadística de las componentes permanentes del dinero y del ingreso real en la determinación del nivel de precios para la muestra seleccionada.

Este documento tiene cuatro secciones principales además de la introducción: en la sección II se presenta el modelo teórico que sustenta la hipótesis central del trabajo, en la sección III se expone el método econométrico, en la sección IV se consignan los resultados y en la sección V se resume el trabajo y se presentan sus conclusiones principales.

II El modelo

El punto de partida es un modelo de equilibrio general intertemporal con expectativas racionales. Su fundamentación microeconómica supone considerar el dinero como uno de los argumentos de la función de utilidad. Este corresponde, excepto por una diferencia que se mencionará más adelante, al expuesto por Walsh (1998; ecuaciones 5.34, 5.35, 5.36 y 5.37, p. 205), y difiere del modelo tradicional de oferta agregada, *IS* y *LM* en dos aspectos relacionados entre sí: supone expectativas racionales y, por tanto, incluye el producto esperado futuro como argumento de la función *IS* (Walsh, *ibid.*). Además, difiere del modelo de Sargent (1987, p. 460) básicamente por esta inclusión. El conjunto de ecuaciones que conforman el modelo se presenta a continuación.

Curva de oferta agregada (o "*de Phillips*"):

$$y_t = \gamma(Ip_t - {}_tIp^*_{t-1}) + \lambda y_{t-1} + u_t \quad \gamma > 0 \tag{1}$$

Curva de equilibrio de portafolio (o "*LM*"):

$$m_t - Ip_t = y_t + bi_t + \varepsilon_{1t} \quad b < 0 \tag{2}$$

Curva de equilibrio del mercado de bienes (o "*IS*"):

$$y_t = {}_{t+1}y^*_{t-1} - \left[i_t - \left({}_{t+1}Ip^*_{t-1} - Ip_t\right)\right] + \varepsilon_{2t} \tag{3}$$

Siendo:

$${}_tIp^*_{t-1} = E\left[Ip_t \middle| \Omega_{t-1}\right] \tag{4}$$

$${}_{t+1}Ip^*_{t-1} = E\left[Ip_{t+1} \middle| \Omega_{t-1}\right] \tag{5}$$

$${}_{t+1}y^*_{t-1} = E\left[y_{t+1} \middle| \Omega_{t-1}\right] \tag{6}$$

El sistema de información $\{y, m, Ip, i\}$ está constituido por los logaritmos naturales del producto real, la cantidad nominal de dinero, el nivel de precios y el factor interés nominal (1 + la tasa de interés nominal), respectivamente. Adicionalmente, $u_t, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ son perturbaciones estocásticas serialmente independientes con media cero y varianza finita, que representan choques de oferta agregada (tecnológicos, etc.), de demanda de dinero y de demanda agregada, respectivamente. Ω_{t-1} es el conjunto de información (compartido por el sector privado y las autoridades económicas) disponible en el período t-1 con el cual se forman las expectativas racionales de las variables para los períodos inmediatamente siguientes (t y t+1). El conjunto de información incluye, como mínimo, todas las variables endógenas y exógenas de los períodos t-1 y anteriores. Finalmente, *E* es el operador "esperanza matemática", condicional a la información disponible (operador de expectativas racionales).

La diferencia con el modelo de Walsh consiste en el parámetro λ, el cual toma el valor de uno en dicho modelo[4].

Tomando expectativas condicionales a la información disponible en (t-1) en las ecuaciones (2) y (3) y resolviendo para precios y tasa de interés, respectivamente, se tiene que:

$$E[Ip_t] = E[m_t] - E[y_t] - b\,E[i_t] \quad (7)$$

$$E[i_t] = E[y_{t+1}] - E[y_t] + E[Ip_{t+1}] - E[Ip_t] \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) se obtiene la ecuación (9):

$$(1-b)E[Ip_t] = E[m_t] - b\,E[y_{t+1}] - (1-b)E[y_t] - b\,E[Ip_{t+1}] \quad (9)$$

Consistente con el hecho de que muchos choques, entre ellos los tecnológicos, tienen un efecto permanente sobre el nivel del producto, se supone que éste exhibe una tendencia estocástica[5]. Por simplicidad se considera la siguiente representación: $y_{t+1} = a + y_t + \nu_{t+1}, \quad \nu_{t+1} \sim iid\left(0, \sigma_\nu^2\right)$, y considerando expectativas condicionales al conjunto de información Ω_{t-1}, resulta que[6]: $E[y_{t+1}] = a + E[y_t]$. Así, la ecuación (9) puede ser reescrita como sigue:

$$E[Ip_t] = \frac{1}{(1-b)}\{E[m_t] - ab - E[y_t] - b\,E[Ip_{t+1}]\} \quad (10)$$

Dado que $b < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < -\dfrac{b}{(1-b)} < 1$, la ecuación en diferencias (10) puede ser solucionada en $E\left[Ip_t \middle| \Omega_{t-1}\right]$ hacia adelante como:

[4] La otra diferencia con el de Sargent, además de la ya mencionada, es el supuesto (implícito en el modelo de Sargent) de una elasticidad del producto demandado a la tasa de interés real (en la curva *IS*) que puede ser diferente de –1.

[5] Véase Campbell y Perron (1991).

[6] Suponer que $y_{t+1} = a + y_t + \nu_{t+1}$ parece contradictorio con la ecuación (1), pero no necesariamente lo es si: 1) a = 0, y λ =1, ó 2) si u_t tiene una distribución probabilística distinta a la de v_t. Hacemos tal supuesto porque: 1) nos parece que representa adecuadamente la ley de evolución univariada del logaritmo del PIB real colombiano, 2) nos permite mantener en su nivel mínimo las diferencias entre el modelo (1), ..(6) y los de Sargent y Walsh ya citados, y 3) nos permite alcanzar de manera menos complicada nuestro objetivo. Por lo demás, tal supuesto nos parece auxiliar y ninguna tesis o ninguna conclusión importantes cambiarían, excepto la referida a la estimación estadística de los parámetros *a* y λ. Lo único esencial para generar la hipótesis de que el nivel de precios depende de las expectativas sobre las trayectorias del dinero y el producto es considerar que tales trayectorias son exógenas.

$$E\left[Ip_t\right] = -ab + \frac{1}{(1-b)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[m_{t+j}\right] - \frac{1}{(1-b)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[y_{t+j}\right]$$
$$\Leftrightarrow \lim_{j\to\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[Ip_{t+j}\right] = 0 \qquad (11)$$

de tal forma que, el valor esperado del nivel de precios depende de los valores presentes de las corrientes futuras esperadas de dinero e ingreso (o producto)[7].

Teniendo en cuenta el objetivo del trabajo, es necesario transformar la ecuación (11) para lograr una especificación tal que la variable dependiente sea el nivel de precios y no su valor esperado.

Suponiendo endogeneidad de precios en la ecuación de oferta agregada (ecuación 1), esta puede ser expresada mediante:

$$Ip_t = E\left[Ip_t\right] + \frac{1}{\gamma}y_t - \frac{\lambda}{\gamma}y_{t-1} + \xi_t, \qquad \xi_t \sim iid\left(0, \sigma_\xi^2\right) \qquad (12)$$

de tal forma que, el término de perturbación estocástico, $\xi_t = \frac{-1}{\gamma}u_t$, puede ser entendido como un nuevo error con propiedades estadísticas similares a las del error de la ecuación (1). Reemplazando en la ecuación (12) el valor esperado condicional de precios por su formulación dada en (11), se tiene:

$$Ip_t = -ab + \frac{1}{(1-b)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[m_{t+j}\right]$$
$$- \frac{1}{(1-b)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[y_{t+j}\right] + \frac{1}{\gamma}y_t - \frac{\lambda}{\gamma}y_{t-1} + \xi_t \qquad (13)$$

Para simplificar la escritura definimos los valores presentes de las corrientes futuras de dinero e ingreso real como sigue:

---

[7] En este caso $\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j$ equivale a un factor de descuento. Este factor es función, en este modelo, de la elasticidad de la demanda de saldos reales de dinero con respecto a la tasa de interés (véase la ecuación 2). Por lo demás, la ecuación 11 implica, como se aclara con la condición de límite, que se excluye la posibilidad de cambios permanentes del nivel de precios sin cambios en los factores fundamentales (corrientes futuras de dinero e ingreso real), es decir, se excluye la posibilidad de soluciones del tipo “burbuja especulativa” del nivel de precios (véase McCallum 2001).

$$cm_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[m_{t+j}\right] \tag{14}$$

$$cy_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[y_{t+j}\right] \tag{15}$$

Por tanto, la ecuación (13) puede ser escrita así:

$$Ip_t = -ab + \frac{1}{(1-b)}cm_t - \frac{1}{(1-b)}cy_t + \frac{1}{\gamma}y_t - \frac{\lambda}{\gamma}y_{t-1} + \xi_t \tag{16}$$

En esta ecuación, el nivel de precios es función de los ingresos reales previo y contemporáneo, así como de los valores presentes de la corrientes futuras esperadas del dinero y del ingreso real; estos valores presentes se constituyen como variables no observables.

En lo que sigue se considera que estas últimas variables tienen por ley de evolución paseos aleatorios con deriva, así:

$$cm_t = d_1 + cm_{t-1} + \eta_{1t} \ , \quad \eta_{1t} \sim iid\left(0, \sigma^2_{\eta 1}\right) \tag{17}$$

$$cy_t = d_2 + cy_{t-1} + \eta_{2t} \ , \quad \eta_{21t} \sim iid\left(0, \sigma^2_{\eta 2}\right) \tag{18}$$

En tal caso, las ecuaciones (16), (17) y (18) permiten formular una representación estado-espacio (Representación 1) que hace posible la estimación de las variables no observables y la verificación de su relevancia estadística en la determinación de los precios. Tal representación se expresa a través de las ecuaciones de medida y transición (19) y (20), respectivamente:

$$\left[Ip_t\right] = \begin{bmatrix}1 & y_t & y_{t-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\theta_1 & -\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cm_t \\ cy_t\end{bmatrix} + \left[\xi_t\right] \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}cm_t \\ cy_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_1 \\ d_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cm_{t-1} \\ cy_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\eta_{1t} \\ \eta_{2t}\end{bmatrix} \tag{20}$$

En esta representación los elementos del vector de parámetros por estimar (Θ), de dimensión (7x1), se definen como sigue:

$\theta_1 = \frac{1}{1-b}$, $\theta_2 = -ab$, $\theta_3 = \frac{1}{\gamma}$, $\theta_4 = -\frac{\lambda}{\gamma}$, $\theta_5 = d_1$, $\theta_6 = d_2$, $\theta_6 = \frac{\theta_2}{(1-\theta_1)}$,

$\theta_7 = \sigma^2_{\eta 1}$, $\theta_8 = \sigma^2_{\eta 2}$, $\theta_9 = \sigma^2_{\xi}$

La derivación de la expresión correspondiente al parámetro θ_6 se presenta en el anexo1.

Una formulación alternativa de la ecuación de oferta agregada se presenta mediante la ecuación (21). Esta permite expresar el nivel del producto observado de la economía en función de sorpresas inflacionarias y del valor presente de las corrientes futuras de producto, entendido tal valor presente como el nivel de producto de estado estable:

$$y_t = \gamma(Ip_t - {}_tIp^*_{t-1}) + cy_t + u_t \quad \gamma > 0 \tag{21}$$

Por consiguiente, en este caso, el nivel de precios es determinado por:

$$Ip_t = E[Ip_t] + \frac{1}{\gamma} y_t - \frac{1}{\gamma} cy_t + \upsilon_t \ , \ \upsilon_t \sim iid\left(0, \sigma^2_\upsilon\right) \tag{22}$$

Manteniendo los supuestos de leyes de evolución presentados en las ecuaciones (17) y (18), y realizando de nuevo el proceso de sustitución ya aplicado se tiene:

$$Ip_t = -ab + \frac{1}{1-b} cm_t - \frac{1}{1-b} cy_t + \frac{1}{\gamma}\left(y_t - cy_t\right) + \upsilon_t \tag{23}$$

Así, en este contexto, la ecuación (23) reemplaza a la ecuación (16). Ahora, si se supone:

$$y_t = cy_t + \eta_t \tag{24}$$

entonces una versión simplificada de (23) se presenta en (25):

$$Ip_t = -ab + \frac{1}{(1-b)} cm_t - \frac{1}{(1-b)} cy_t + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim iid\left(0, \sigma^2_\varepsilon\right)$$

$$\text{con } \varepsilon_t = \frac{1}{\gamma}\eta_t + \upsilon_t \tag{25}$$

De esta forma se tiene una representación estado-espacio alternativa (Representación 2) dada por las ecuaciones (26) y (27):

$$[Ip_t] = [\phi_2] + [\phi_1 \quad -\phi_1]\begin{bmatrix} cm_t \\ cy_t \end{bmatrix} + [\zeta_t] \qquad (26)$$

$$\begin{bmatrix} cm_t \\ cy_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cm_{t-1} \\ cy_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

En esta, los elementos del vector (Φ) de parámetros por estimar, de dimensión (5x1), se definen como sigue:

$$\phi_1 = \frac{1}{1-b},\ \phi_2 = -ab,\ \phi_3 = d_1,\ \phi_4 = d_2 = \frac{\phi_2}{(1-\phi_1)},$$

$$\phi_5 = \sigma^2_{\eta 1},\ \phi_6 = \sigma^2_{\eta 2},\ \phi_7 = \sigma^2_{\xi}$$

III. Marco econométrico

A. Representación estado-espacio y filtro de Kalman

La representación estado-espacio de la alternativa 1, expresada mediante las ecuaciones (19) y (20), puede ser escrita en forma matricial compacta como sigue:

$$IP_t = A'Y_t + Z\,\alpha_t + \varepsilon_t\,, \quad t = 1,\cdots,T \qquad (28)$$

$$\alpha_t = \mathrm{T}\,\alpha_{t-1} + \eta_t\,, \quad t = 1,\cdots,T \qquad (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29) se definen como la ecuaciones de medida y de transición, respectivamente[8]. En estas ecuaciones $IP_t = [Ip_t]$ es un vector (1X1) conformado por la variable dependiente logaritmo natural del nivel de precios; $Y_t = [1 \quad y_t \quad y_{t-1}]$ es un vector (1X3) que contiene las variables consideradas exógenas, en este caso el producto y su primer rezago; $A' = [\theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]$ y $Z = [\theta_1 \quad -\theta_1]$ son vectores (1X3) y (1X2) de parámetros por estimar, asociados a las variables exógenas y al vector de estado $\alpha_t = [cm_t \quad cy_t]'$, respectivamente. El vector de estado está conformado por los valores presentes (en t) de las corrientes futuras del dinero y del ingreso, que se constituyen como variables no observables

[8] Véanse, Harvey (1990) y Hamilton (1994).

que requieren ser estimadas con el propósito de verificar su relevancia estadística dentro del modelo.

En general, la matriz T está conformada por parámetros no conocidos. En este caso, la matriz T se constituye como una matriz idéntica de orden 2: $\mathrm{T} = I_2$ [9], debido a las leyes de evolución descritas en las ecuaciones (17) y (18). Adicionalmente, $\forall\ t = 1, \cdots, T$ los vectores ε_t (1X1) y η_t (2X1) representan perturbaciones serialmente no correlacionadas con: $E[\varepsilon_t] = 0$ y $Var[\varepsilon_t] = \sigma_t^2$ y $E[\eta_t] = 0$ y $Var[\eta_t] = Q^2{}_t$.

En términos de la segunda alternativa, ecuaciones (26) y (27), la representación estado-espacio se simplifica de la siguiente forma:

$$IP_t = a + Z\,\alpha_t + \varepsilon_t\,, \quad t = 1, \cdots, T \qquad (30)$$

$$\alpha_t = \mathrm{T}\alpha_{t-1} + \eta_t\,, \quad t = 1, \cdots, T \qquad (31)$$

La única diferencia con la representación anterior radica en no incluir variables exógenas en la ecuación de medida. Es decir, $A'Y_t$ se reemplaza por el escalar a, que corresponde al intercepto.

Adicionalmente, cada una de las especificaciones estado-espacio supone:

- un vector de estado inicial α_0 con $E[\alpha_0] = a_0^*$ y $Var - Cov[\alpha_0] = P_0$
- $E\left[\varepsilon_t \eta_s^{'}\right] = 0 \quad \forall\ t \neq s$ (32)
- $E\left[\varepsilon_t \alpha_0^{'}\right] = 0$, $E\left[\eta_t \alpha_0^{'}\right] = 0 \quad \forall\ t = 1, \cdots, T$ (33)

Las dos representaciones estado-espacio suponen matrices de coeficientes (A', Z, T, a) no cambiantes a través del tiempo, es decir, caracterizadas como representaciones invariantes en el tiempo.

Una vez establecidas las representaciones estado-espacio y sus supuestos fundamentales, el trabajo econométrico se concentra en la estimación, en cada caso, del vector

[9] En general, muchos trabajos empíricos coinciden en señalar que los agregados monetarios y el producto real son variables integradas de orden uno, I(1). Así, teniendo en cuenta las definiciones de cm_t y cy_t dadas en las ecuaciones (14) y (15) se espera que tales variables no observables sean integradas de orden uno, I(1).

de estado, de los parámetros y de las distintas matrices de varianza-covarianza del sistema. Como señala Harvey (1994), para tal propósito existen diferentes algoritmos, siendo el principal el filtro de Kalman.

El filtro de Kalman se define como un procedimiento recursivo que permite calcular el estimador óptimo del vector de estado en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en el momento t, dichas estimaciones (Clar *et al*. 1998). El proceso recursivo inherente al filtro de Kalman puede ilustrarse mediante el siguiente esquema[10] (Figura 1).

Figura 1

Valores iniciales:
$\alpha_0^* = 0$, $P_0 = 10e^{10} I$

Ecuaciones de predicción

Alternativa 1:

$$\alpha^*_{t|t-1} = \mathrm{T}\alpha^*_{t-1} \quad t = 1,\cdots,T$$

$$P_{t|t-1} = \mathrm{T}P_{t-1}\mathrm{T}' + Q \quad t = 1,\cdots,T$$

Alternativa 2:

$$\alpha^*_{t|t-1} = \mathrm{T}\alpha^*_{t-1} \quad t = 1,\cdots,T$$

$$P_{t|t-1} = \mathrm{T}P_{t-1}\mathrm{T}' + Q \quad t = 1,\cdots,T$$

Ecuaciones de actualización

Alternativa 1:

$$\alpha_t^* = \alpha^*_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z' F_t^{-1}\left(Ip_t - Z\alpha^*_{t|t-1} - A'Y_t\right)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}Z'F_t^{-1}ZP_{t|t-1}$$

$$F_t = ZP_{t|t-1}Z' + H$$

Alternativa 2:

$$\alpha_t^* = \alpha^*_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z' F_t^{-1}\left(Ip_t - Z\alpha^*_{t|t-1} - a\right)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}Z'F_t^{-1}ZP_{t|t-1}$$

$$F_t = ZP_{t|t-1}Z' + H$$

---

[10] Véase Welch y Bishop (2001). Cuatro trabajos recientes que han aplicado el filtro de Kalman en el análisis macroeconómico colombiano son los de Arango (1999), Julio y Gómez (1999), Nieto y Melo (2001) y Melo *et al* (2001).

Siendo α^*_{t-1} el estimador óptimo de α_t basado en la información disponible que incluye Ip_{t-1}, y P_{t-1} la matriz de varianza-covarianza[11] del error de estimación del vector de estado.

De acuerdo con De Jong (1989 y 1991), una representación estado-espacio es difusa si su matriz de varianza –covarianza (var-cov) es arbitrariamente grande, hecho que surge en el contexto de incertidumbre en parámetros y no estacionariedad en el modelo. Por consiguiente, dado que las matrices T de las ecuaciones de transición bajo las dos alternativas (29) y (31) tienen sus raíces sobre el círculo unitario, debido al supuesto de no estacionariedad de las componentes del vector de estado, se tienen representaciones con estado inicial difuso. Este hecho explica, siguiendo a Harvey (1994), que se haya considerado el valor inicial $P_0 = 10e^{10} I_2$

B. Estimación por máxima verosimilitud

La teoría clásica de estimación por máxima verosimilitud es aplicada para obtener estimaciones de los parámetros en A' y a y de los hiperparámetros[12] en las matrices Z, H y Q. Si cada uno de los vectores conformados por las perturbaciones $\{\varepsilon_t\}$ y $\{\eta_t\}$ sigue una distribución normal multivariada esto implica que Ip_t, condicional a su conjunto de información relevante en (t-1), bajo cada una de las alternativas, tiene distribución normal. Así:

Alternativa1:

$$\left(Ip_t \middle| y_t, \Im_{t-1}\right) \sim N\left(\left(A' y_t + H' \alpha^*_{t|t-1}\right), \left(H' P_{t|t-1} H\right)\right),$$

$$\Im_{t-1} \equiv \{Ip_{t-1}, \cdots, Ip_1, y_{t-1}\} \qquad (34)$$

Alternativa 2:

$$\left(Ip_t \middle| \Im_{t-1}\right) \sim N\left(\left(a + H' \alpha^*_{t|t-1}\right), \left(H' P_{t|t-1} H\right)\right),$$

$$\Im_{t-1} \equiv \{Ip_{t-1}, \cdots, Ip_1\} \qquad (35)$$

con función de verosimilitud en forma matricial compacta dada por:

$$Log\ L = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\left|F_t\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} v_t' F_t^{-1} v_t$$

Siendo:

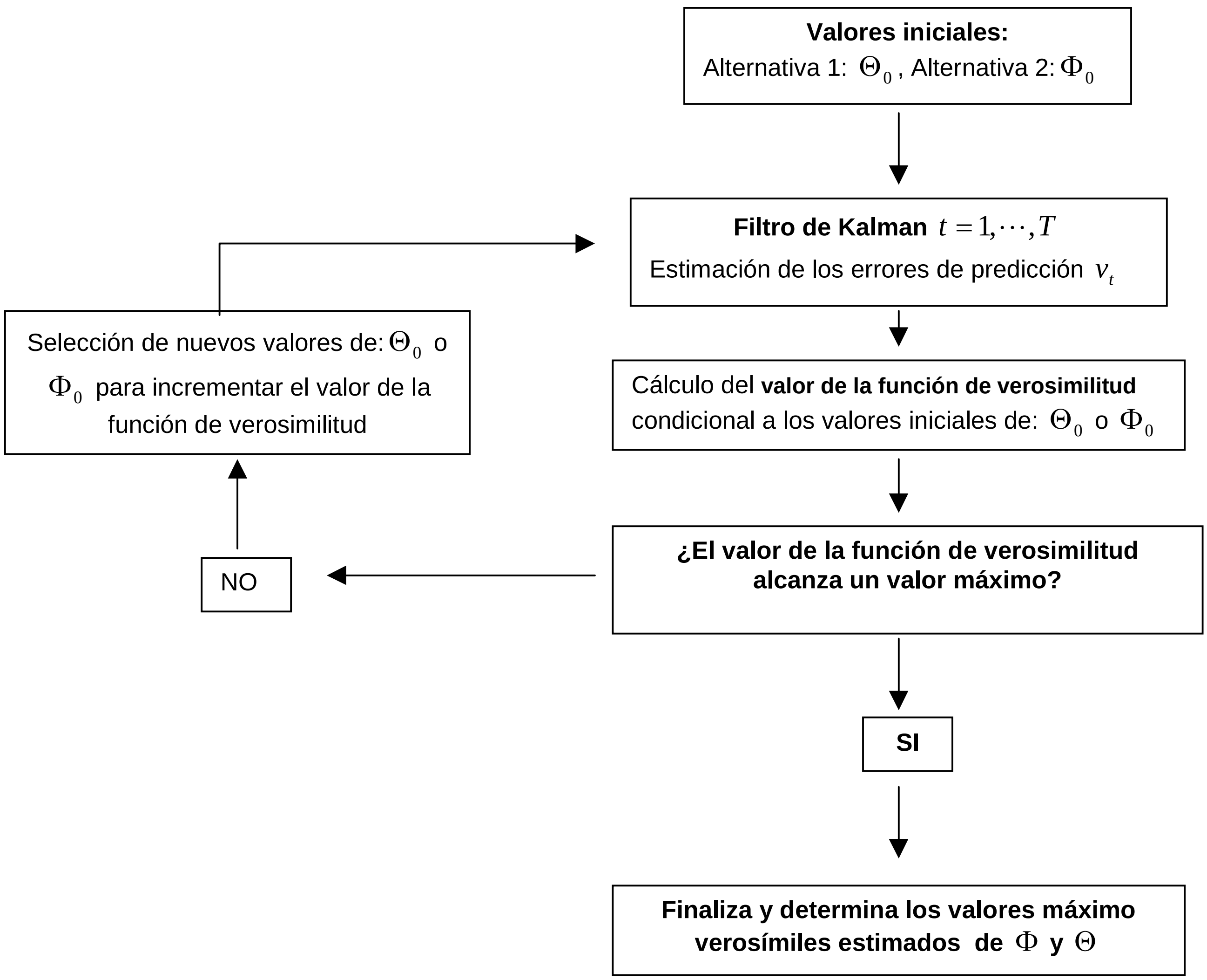
[11] En este caso, matriz de dimensión 2X2.

[12] Los hiperparámetros se refieren a los parámetros considerados en las matrices Z, H y Q que son diferentes de aquellos parámetros asociados a las variables exógenas del sistema.

$$v_t = Ip_t - \hat{Ip}_{t|t-1} \quad t = 1, \cdots, T \qquad (36)$$

Como lo presentan Clar *et al*. (1998), la expresión de la función de verosimilitud (36) es usualmente demasiado compleja para obtener de sus expresiones analíticas los valores de los parámetros que la hacen máxima. Esta dificultad puede ser superada mediante procedimientos de optimización numérica[13] que considera el siguiente esquema:

Figura 2[14]



[13] El procedimiento numérico de optimización no lineal utilizado es *"Double - dogleg"* , el cual combina las ideas de los métodos *"Quasi-Newton"* y *"Trust-Region"* de acuerdo con Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno (véanse: Judge, G. *et al*. [1985], y Hendry [1995]).
[14] Tomada de Cuthbertson *et al*. (1992).

a. Identificación del sistema, reconocimiento de los parámetros e hiperparámetros por estimar y selección de sus valores iniciales.

b. Generación de las perturbaciones v_t a partir de dichos valores iniciales mediante las ecuaciones del filtro de Kalman (Figura 1).

c. Determinación del valor de la función de verosimilitud.

d. Finalización del proceso de estimación al obtener un valor máximo en la función de verosimilitud. Si este valor no es máximo, el procedimiento de estimación seleccionado proporcionará nuevos valores de los parámetros e hiperparámetros para retornar al punto b.

IV Resultados

Los cuadros 1 y 2 consignan los resultados del proceso de estimación para las dos alternativas de representación estado-espacio, ecuaciones (28)-(29) y (30)-(31), siguiendo la Figura 2[15].

A partir del cuadro 1 se puede concluir que el valor presente de las variables mediante las cuales se representan las corrientes futuras de dinero e ingreso son relevantes, desde el punto de vista estadístico[16], en la explicación del nivel de precios. Es de señalar que, este resultado se mantiene al considerar diferentes valores iniciales en el proceso de estimación. Sin embargo, la no relevancia estadística de las variables ingreso contemporáneo (y_t) e ingreso previo (y_{t-1}) (de acuerdo con las altas desviaciones estándar de sus coeficientes: θ_3 y θ_4) podría hacer pensar que la especificación de la representación estado-espacio no es la más adecuada, en términos de soporte empírico, para el caso en consideración.

[15] En el ejercicio econométrico la variable observable es el índice de precios al consumidor bajo la transformación logarítmica (IPC, fin de año).

[16] En este contexto, la relevancia se mide a través de la construcción de la estadística "t".

Cuadro 1. Alternativa 1

Parámetro	Valor Estimado	Desviación Estándar*	Gradiente
θ_1	0.660	0.052	-0.460
θ_2	0.015	30.82	0.018
θ_3	7.733	81.46	0.066
θ_4	-7.764	80.51	0.067
θ_5	0.241	101.05	-0.004
θ_7	0.940	0.039	0.000
θ_8	0.479	0.028	0.000
θ_9	0.517	0.020	-0.322
$\theta_6 = \dfrac{\theta_2}{(1-\theta_1)} = 0.045$			
Valor función objetivo: -2.285 *"P-Value"* Prueba de normalidad univariada Jarque – Bera ν_t : 0.53 Doornik – Hansen ν_t : 0.47 *Obtenida a partir de la matriz hessiana correspondiente al proceso de optimización no lineal (Hamilton 1999).			

De las estimaciones presentadas en el cuadro 1, y dadas las definiciones de los diferentes parámetros, se tiene:

Cuadro2. Altenativa 1

Parámetro	Estimación
a	0.03
b	-0.52
γ	0.13
λ	1
d_1	0.24
d_2	0.04
$\sigma^2_{\eta_1}$	0.94
$\sigma^2_{\eta_1}$	0.48
σ^2_{ξ}	0.52

El cuadro 3 consigna los resultados de la estimación de la representación estado-espacio de la segunda alternativa. Nuevamente, se puede concluir que los valores presentes de las corrientes futuras de dinero e ingreso son estadísticamente relevantes en la explicación de los precios.

Cuadro 3. Alternativa 2

Parámetro	Valor Estimado	Desviación Estándar	Gradiente
ϕ_1	0.745	0.081	-0.170
ϕ_2	0.011	10.82	-0.109
ϕ_3	0.190	47.28	0.025
ϕ_5	1.400	0.083	-0.060
ϕ_6	1.500	0.089	-0.010
ϕ_7	10.50	0.302	-0.035
$\phi_4 = \frac{\phi_2}{(1-\phi_1)} = 0.043$			
Valor función objetivo: -3.433 *"P-Value"* Prueba de normalidad Jarque – Bera ν_t : 0.109 Doornik – Hansen ν_t: 0.010			

De igual forma que bajo la alternativa 1, el resultado se mantiene al considerar diferentes valores iniciales en el proceso de estimación. Esta alternativa de modelación parece ser más adecuada desde un punto de vista estadístico ya que no incorpora variables exógenas no relevantes.

Cuadro 4. Alternativa 2

Parámetro	Estimación
a	0.03
b	-0.34
d_1	0.19
d_2	0.04
$\sigma^2_{\eta_1}$	1.40
$\sigma^2_{\eta_1}$	1.50
σ^2_{ξ}	10.50

Los resultados del cuadro 1 (Alternativa 1) implican que se han estimado tres parámetros del modelo teórico[17]: b = -0,52 , γ = 0,13 y λ = 1. Estos valores podrían considerarse plausibles.

En particular, el parámetro *b* (la elasticidad de la demanda de saldos reales de dinero a la tasa de interés nominal) tiene un valor que está dentro del rango de las estimaciones realizadas con distintos métodos en Colombia en el último decenio[18]. Además, esta estimación es significativa según el bajo valor de la desviación estándar del coeficiente θ_1.

Las estimaciones de γ y λ, en cambio, no son significativas en vista de los altos valores de las desviaciones estándar asociados a los coeficientes θ_3 y θ_4.

Bajo la alternativa 2 sólo existe un parámetro del modelo teórico a estimar: *b* ($\varphi_1 = \dfrac{1}{1-b}$). La estimación de *b*, según el cuadro 2, fue –0,34 (y significativa de acuerdo con la desviación estándar de ϕ_1), cifra que también se encuentra dentro del rango de los valores estimados para el caso colombiano de la segunda mitad del siglo XX.

Un sistema es estable si para cualquier estado inicial α_0 el vector de estado converge a una solución de equilibrio $\overline{\alpha}$. La condición necesaria y suficiente para alcanzar dicha estabilidad es que las raíces características de la matriz de transición T, en cada una de las alternativas, tenga módulo menor que uno. Los sistemas, bajo las alternativas consideradas, no satisfacen esta condición de estabilidad dado el supuesto inicial sobre las leyes de evolución de las corrientes futuras de dinero e ingreso. Los resultados, por consiguiente, sólo son válidos para la muestra bajo estudio.

El filtro de Kalman aplicado a una representación de estado–espacio cumple la propiedad de estado de equilibrio estable (*“steady state”*) si la matriz de varianza-covarianza del error de predicción converge a una matriz $\overline{P}$[19]. En nuestro caso, las dos estimaciones del filtro de Kalman convergen a una matriz fija. Es de señalar que, a falta de la propiedad de estabilidad, una aproximación a la verificación de dicha convergencia se llevó a cabo revisando los valores de las matrices $P_{t|t-1}$ en cada momento del tiempo.

---

[17] Recuérdese que: $\theta_1 = \dfrac{1}{1-b};\ \theta_3 = \dfrac{1}{\gamma};\ \theta_4 = -\dfrac{\lambda}{\gamma} \Rightarrow \lambda = -\theta_4\gamma \cdot$

[18] Misas *et al.* (1994), Gómez (1998) y Gómez (1999) estimaron, con métodos econométricos, esta elasticidad en –0,29, -0,899 y -0,772, respectivamente. Posada (1995), con un modelo macroeconómico de “calibración”, dedujo que su valor era –0,4.

[19] En el caso de no alcanzar convergencia se tendría una estimación del vector de estado con variabilidad explosiva.

V. Resumen y conclusiones

El presente trabajo reporta los resultados de un ejercicio que examina la relevancia estadística de las componentes permanentes del dinero nominal y del producto real sobre el nivel de precios (IPC), para el caso de la economía colombiana en el período 1954-2000. En este trabajo, tales componentes, no observables, se definen como los valores presentes, en cada momento del tiempo, de las corrientes futuras esperadas de la cantidad de dinero nominal y del ingreso real.

El aporte de este trabajo consiste en utilizar un modelo macroeconómico con expectativas racionales, formularlo en términos de una representación estado-espacio que permite expresar la dependencia del nivel de precios de las variables no observables mencionadas, aplicar un procedimiento de optimización no lineal que considera, de forma simultánea, el algoritmo del filtro de Kalman y el proceso de estimación de máxima verosimilitud, para, finalmente, someter a prueba la hipótesis de relevancia estadística de las componentes permanentes bajo análisis.

De acuerdo con los resultados no existe evidencia empírica para rechazar la hipótesis de relevancia estadística de las componentes permanentes del dinero y del ingreso real en la determinación del nivel de precios para la muestra seleccionada. Este resultado indica que es conveniente que la autoridad monetaria continúe prestando atención al comportamiento de los agregados monetarios (además de las variables de producción real), procurando diferenciar entre sus componentes permanentes, y, en particular, lo que los agentes económicos pueden juzgar como tal, y los transitorios[20].

[20] Es la discrepancia entre el crecimiento observado de la cantidad de dinero y la expectativa racional de tal crecimiento lo que permite, en la versión de Walsh (1998) del modelo teórico del presente documento, que las operaciones monetarias (contraccionistas o expansivas) de mercado abierto puedan tener un efecto liquidez de corto plazo.

Referencias

Alvarez, F.; R. E. Lucas, y W. Weber (2001); “Interest Rates and Inflation”, *The American Economic Review*, Vol. 91, No. 2.

Arango, L. E. (1999); “Componentes no observados de la inflación en Colombia”, *Revista de Economía del Rosario*, Vol. 2, No. 1.

Caballero, C. (2001); “La estrategia monetaria y su ejecución en el 2001: conceptos y resultados”, presentación en el VI Congreso Nacional de Tesorería, Asociación Bancaria de Colombia (septiembre).

Cabos, K., y N. Siegfried (2001); “Controlling Inflation in Euroland”, *Universität Hamburg Quantitative Macroeconomics Working Paper Series No. 1/01.*

Campbell J. y P. Perron (1991); “*Pitfalls and Opportunities: what macroeconometrics should know about unit roots”,* NBER.

Clar, M., R. Ramos, y J. Suriñach (1998); *“A latent variable model to measure regional manufacturing production in Spain”*, Workshop on Regional Economic Indicators, University of Minho, Braga.

Cuthbertson, K., S. Hall, y M. Taylor (1992); *Applied Econometric Techniques*, Harvester Wheatsheaf.

De Jong, P. (1989) *“*Stable Algorithms for the State Space Mode*l”;* J*ournal of Time Series Analysis*, Vol. 12, No. 2.

---------------- (1991); *“*The Diffuse Kalman Filter*”*, *Annals of Statistics*, Vol. 19, No. 2.

Doornik, J. A., y H. Hansen, (1994*) “An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality”*, Nuffield College, Oxford.

Fung, B.; S. Mitnick, y E. Remolana (1999); “Uncovering Inflation Expectations and Risk Premiums from Internationally Integrated Financial markets”, *Bank of Canada Working Paper 99-6*.

Gómez, J. (1998); “La demanda por dinero en Colombia”, *Borradores de Economía* (B. de la R.), No. 101.

Gómez, J. E. (1999); “Especificación de la demanda por dinero con innovación financiera”, *Borradores de Economía* (B. de la R.), No. 128.

Harvey, A. (1994); *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press.

Hamilton, D. (1994); *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

---------------- (1999); *Handbook of Econometrics*, Vol IV, Chapter 50.

Hendry, D. (1995); *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press.

Jarque, C. M., y A. K. Bera (1980); “Efficient test for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals”, *Economics Letters*.

Judge, G.; W. Griffiths; R. Carter Hill; H. Lütkepohl, y T. Lee (1985); *The Theory and Practice of Econometrics*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Julio, J. M., y J. Gómez (1999); “Output gap estimation, estimation uncertainty and its effect on policy rules”, *Borradores de Economía*, No. 125.

McCallum, B. (2001); “Indeterminacy, bubbles, and the fiscal theory of price level determination”, *Journal of Monetary Economics*, No. 47.

Melo, L. F.; F. Nieto; C. E. Posada; Y. R. Betancourt, y J. D. Barón (2001); “Un índice coincidente para la actividad económica colombiana”, documento no publicado (disponible a pedido), Banco de la República, Bogotá.

Meltzer, A. (2001); “Money and Monetary Policy: An Essay in Honor of Darryl Francis”, *Federal Reserve Bank of St. Louis*, Vol. 83, No. 4.

Misas, M.; H. Oliveros, y J. D. Uribe (1994); “Especificación y estabilidad de la demanda por dinero en Colombia”, *Borradores Semanales de Economía* (B. de la R.), No. 11.

Nieto, F., y L. F. Melo (2001); “Sobre un índice coincidente para el estado de la economía”, documento no publicado (disponible a pedido), Banco de la República, Bogotá.

Posada, C. E. (1995); “El costo de la inflación”, *Borradores Semanales de Economía* (B. de la R.), No. 30.

Sargent, T. (1987); *Macroeconomic Theory* (segunda edición), Academic Press.

SAS/IML Software, Versión 8, Changes and Enhancements.

Söderlind, P. (1999); “Solution and estimation of RE macromodels with optimal policy”, *European Economic Review*, Vol. 43, Nos. 4-6.

Söderlind, P. (2001); “What if Fed had Been an Inflation Nutter?” (Stockholm School of Economics; documento no publicado conseguido a través de *Internet*).

Svensson, L. (1998); “Open-Economy Inflation Targeting”, *NBER Working Paper, 6545.*

Svensson, L. (1999), “Inflation targeting as a monetary policy rule”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 43, No. 3.

Uribe, J. D.; J. Gómez, y H. Vargas (1999); “Strategic and Operational Issues in Adopting IT in Colombia”, Banco de la República (versión no publicada disponible en el Departamento de Comunicación Institucional).

Walsh, C. (1998), *Monetary Theory and Policy*, MIT Press.

Welch, G., y G. Bishop, (2001), “An Introduction to the Kalman Filter”, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill.

Anexo 1

De acuerdo con la ecuación (18) y el supuesto de que el ingreso real sigue una caminata aleatoria con deriva se tienen las siguientes ecuaciones:

$$cy_t = d_2 + cy_{t-1} + \eta_{2t}$$

$$y_{t+j} = a + y_{t+j-1} + v_t$$

Dada la definición del valor presente de las corrientes futuras del ingreso en la ecuación (15) como:

$$cy_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[y_{t+j}\right]$$

es posible re formular a cy_t de la siguiente manera:

$$cy_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-b}{1-b}\right)^j E\left[a + y_{t+j-1} + v_t\right]$$

siendo:

$$\begin{aligned} cy_t &= \sum_{j=0}^{\infty} a Z^j + \sum_{j=0}^{\infty} Z^j E\left[y_{t+j-1}\right] \quad , \; Z = \left(\frac{-b}{1-b}\right), \quad |Z| < 1 \\ &= a\sum_{j=0}^{\infty} Z^j + cy_{t-1} \\ &= d_2 + cy_{t-1} \end{aligned}$$

La convergencia de $\sum_{j=0}^{\infty} Z^j$ implica que $d_2 = a(1-b) = \theta_6$; sustituyendo a y b por sus respectivas definiciones en términos de θ_1 y θ_2, es decir: $\theta_1 = \frac{1}{(1-b)}$ y $\theta_2 = -ab$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \theta_2\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) + \theta_2 \\ &= \frac{\theta_2}{(1-\theta_1)} \end{aligned}$$

De manera similar, en la alternativa 2, se deriva $\phi_4 = \frac{\phi_2}{(1-\phi_1)}$